23.03.2022

Тема: **Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии**

Цели: вывести формулу суммы первых *n* членов арифметической прогрессии; формировать умение применять эту формулу при решении задач.

Ход урока

I. Объяснение нового материала.

1. Создание проблемной ситуации.

З а д а ч а. Ученик мастера изготовил в первую неделю работы 15 гончарных изделий, а в каждую следующую неделю изготовлял на 5 изделий больше, чем в предыдущую. Сколько изделий ученик изготовил за восьмую неделю? Сколько изделий ученик изготовил всего в течение десяти недель?

Ответ на первый вопрос ученики знают, как получить, такие задачи решались ими на прошлых занятиях. Количество изготовленных изделий в первую, вторую и т. д. недели можно обозначить $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, причем (a_n) – арифметическая прогрессия с разностью $d = 5$ и первым членом $a_1 = 15$. За восьмую неделю ученик изготовил гончарных изделий:

$a_8 = 15 + 5\,(8 - 1) = 50$.

Для ответа на второй вопрос ученики могут предложить только такой способ решения: подсчитать количество изделий, выполненных за 2-ю, 3-ю, …, 10-ю неделю, и сложить. Это очень долго. А если в задаче нужно будет найти сумму ста членов арифметической прогрессии, тысячи? Возникает проблема – нужна общая формула.

2. Пример из истории математики.

С формулой суммы *n* первых членов арифметической прогрессии связан эпизод из жизни немецкого математика Карла Гаусса (1777–1855). Маленькому Карлу было 9 лет, когда учитель, занятый проверкой работ учеников, предложил классу сложить все натуральные числа от 1 до 100, рассчитывая надолго занять детей. Каково же было удивление преподавателя, когда через несколько минут Гаусс подошел к нему с верным ответом! Он подошел к решению творчески, заметив, что можно складывать числа не подряд, а парами: 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 … и т. д. Легко увидеть, что сумма чисел в каждой паре равна 101, а таких пар 50, значит общая сумма равна $101 \cdot 50 = 5050$.

А можно ли с помощью рассуждений, аналогичных тем, что проводил маленький Гаусс, найти сумму первых *n* членов любой арифметической прогрессии?

3. Вывод формулы.

Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия.

Обозначим S_n сумму *n* первых членов арифметической прогрессии.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (1)

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1$ (2)

Докажем, что сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна $a_1 + a_n$.

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$;

$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$;
$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$ и т. д.
Число таких пар равно n. Складываем почленно (1) и (2) и получаем
$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$

– формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Обычно арифметическая прогрессия задается первым членом и разностью, поэтому удобно иметь еще формулу суммы n первых членов, выраженную через a_1 и d арифметической прогрессии.

IV. Формирование умений и навыков.

Так как формул суммы n первых членов арифметической прогрессии две, то необходимо сперва выяснить, в заданиях какого вида лучше использовать каждую из них, а затем при решении упражнений анализировать условие и выбирать формулу.

Упражнения:

603. $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$:
а) $S_n = \frac{(3+57)\cdot 60}{2} = 60 \cdot 30 = 1800$;
б) $S_n = \frac{(-10{,}5+51{,}5)\cdot 60}{2} = 41 \cdot 30 = 1230$.

604. $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$:
а) $d = -20 + 23 = 3$; $S_8 = \frac{2\cdot(-23)+3\cdot 7}{2} \cdot 8 = (-46 + 21) \cdot 4 =$
$= -100$;
б) $d = 9{,}6 - 14{,}2 = -4{,}6$; $S_8 = \frac{2\cdot 14{,}2 - 4{,}6\cdot 7}{2} \cdot 8 = (28{,}4 - 32{,}2) \times$
$\times\, 4 = -15{,}2$.

608. а) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $\ldots a_n = 2n$; $S_n = \frac{(x_1+x_n)\cdot n}{2} =$
$= \frac{2+2n}{2} \cdot n = n \cdot (n+1) = n^2 + n$;
б) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $\ldots x_n = 2n - 1$; $S_n = \frac{(x_1+x_n)\cdot n}{2} =$
$= \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$.

605. $S_n = \frac{2b_1+d(n-1)}{2} \cdot n$:
а) $S_9 = \frac{2\cdot(-17)+6\cdot 8}{2} \cdot 9 = \frac{48-34}{2} \cdot 9 = 63$;
б) $S_9 = \frac{2\cdot 6{,}4+0{,}8\cdot 8}{2} \cdot 9 = (6{,}4 + 3{,}2) \cdot 9 = 86{,}4$.

607. $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$; $a_n = 3n + 2$; $a_1 = 3 + 2 = 5$;
$a_{20} = 60 + 2 = 62$; $S_{20} = \frac{5+62}{2} \cdot 20 = 670$.

621.

а) $\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 13 \\ 3xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3y} \\ \frac{9\cdot 4}{9y^2} + 9y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3y} \\ 4 + 9y^4 = 13y^2 \end{cases}$ $9y^4 - 13y^2 + 4 = 0$;

$D = 13^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 169 - 144 = 25$; $\Rightarrow y^2 = \frac{13\pm 5}{18}$;

V. Выполните задание с учебника №609, №611 с151.

Выполненную работу присылайте учителю на электронную почту

ekaterinaefremova160283@gmail.com