

Κεφάλαιο 3^ο

3.1

ΘΕΜΑ 2 18868 3.1

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500^\circ = \varepsilon\varphi 140^\circ$.

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500^\circ$

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$.

ΘΕΜΑ 2 21161 3.1

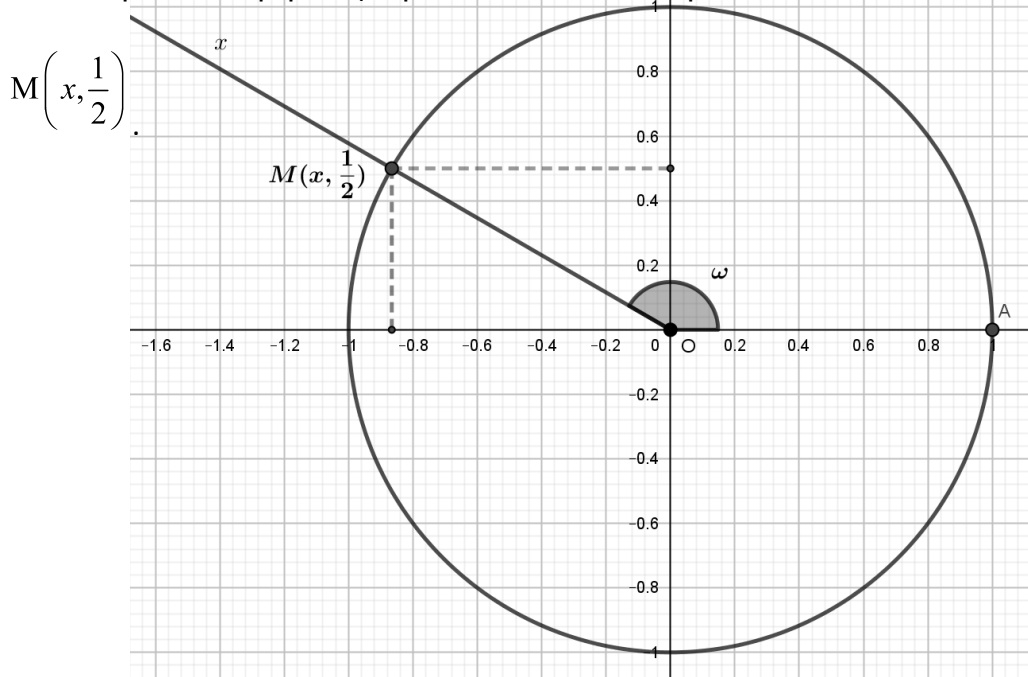
Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ .

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB , επίκεντρη γωνία ω .

β) Αν $\omega=2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

ΘΕΜΑ 2 20824 3.1 – 3.2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $\angle x = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο

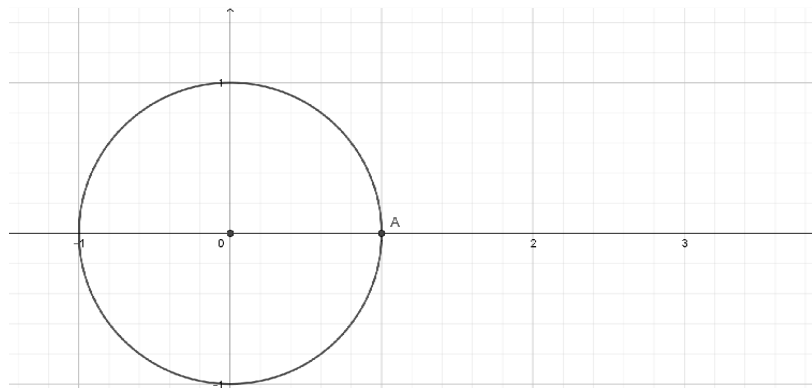


α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΘΕΜΑ 2 17793 3.1

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A .



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\widehat{AB} = 1rad$, $\widehat{A\Gamma} = 2rad$ και $\widehat{A\Delta} = 4rad$.

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3.2

ΘΕΜΑ 2 20817 3.2

Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega}$.

ΘΕΜΑ 2 16000 3.2

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

3.3

ΘΕΜΑ 2 15999 3.2 – 3.3

Δίνεται η παράσταση $A = 2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \eta\mu\theta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi \right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$.

ΘΕΜΑ 2 21237 3.1 – 3.2 – 3.3

$$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4}}.$$

Δίνεται ότι

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

β) Αν για την γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

ΘΕΜΑ 2 22002 3.3

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$

β) συν108°

γ) ημ162°

ΘΕΜΑ 4 18231 2.1 – 2.2 – 3.3

Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση

οποίας η γραφική παράσταση C_f

φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

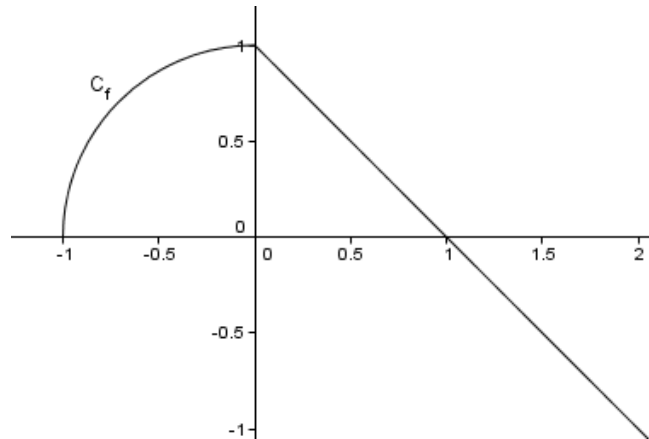
$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $\text{f}(\text{syn}120^\circ)$, $\text{f}(\text{ημ}120^\circ)$

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.



της

3.4

ΘΕΜΑ 2 20660 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β)

i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

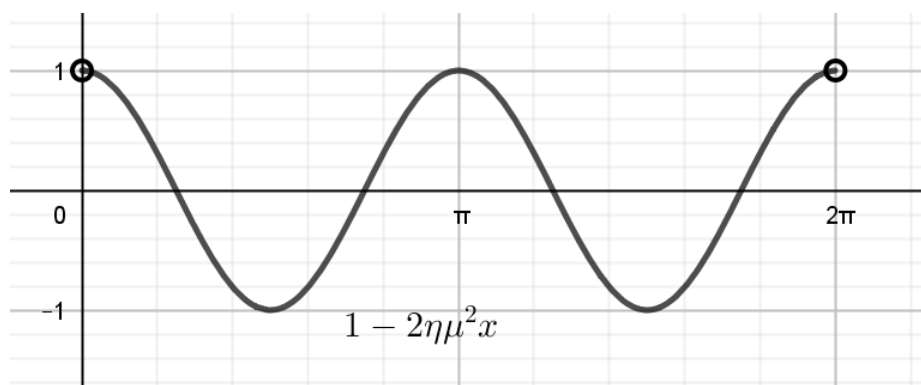
ΘΕΜΑ 2 20867 3.2 – 3.4

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



ΘΕΜΑ 2 20807 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

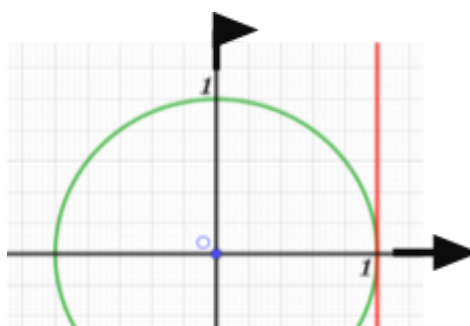
ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

ΘΕΜΑ 2 16131 3.4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



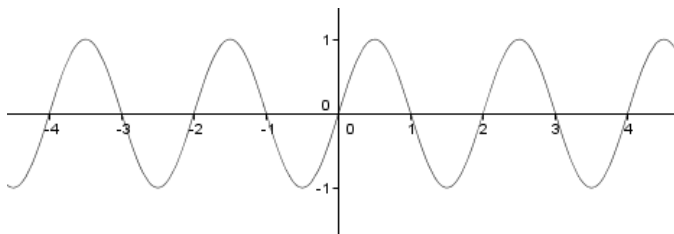
ΘΕΜΑ 2 22003 3.4

Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

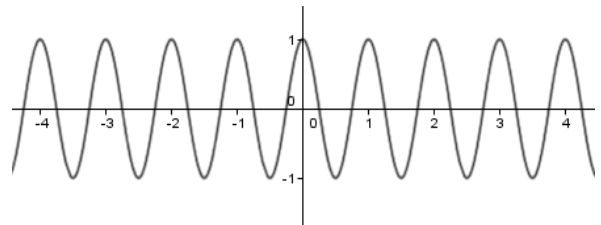
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.

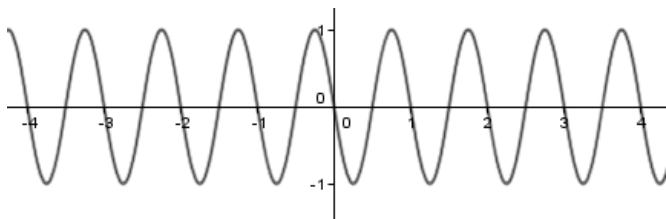
γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



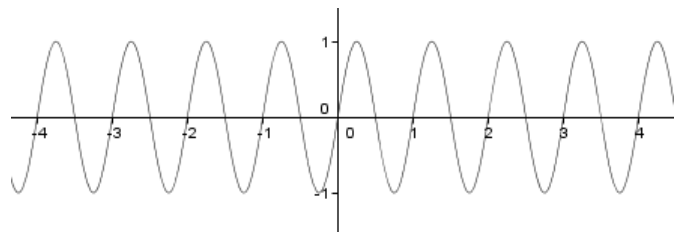
(i)



(ii)



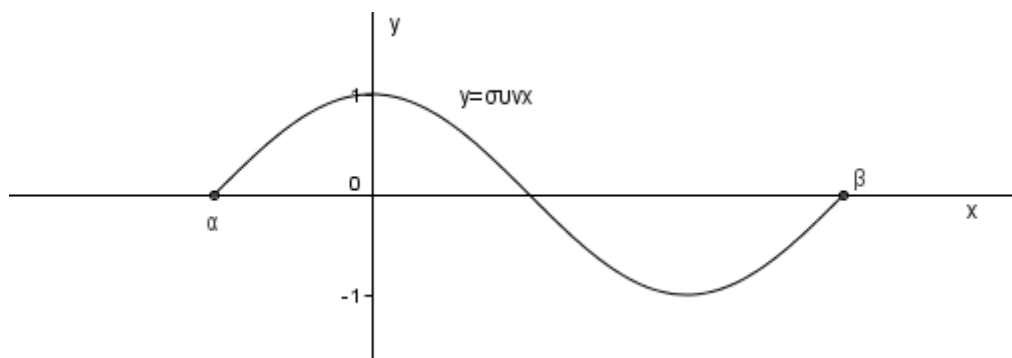
(iii)



(iv)

ΘΕΜΑ 2 22007 3.4

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sin x$.



α) Να βρείτε τα α και β .

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίπτει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta \mu x$;

ΘΕΜΑ 4 20870 1.1 – 3.4

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2,6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta \mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta \mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

i. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον $4,2$ μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι.

Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

ΘΕΜΑ 4 18234 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2, x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3.5

ΘΕΜΑ 2 21995 3.1 – 3.4 – 3.5

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta \mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$.

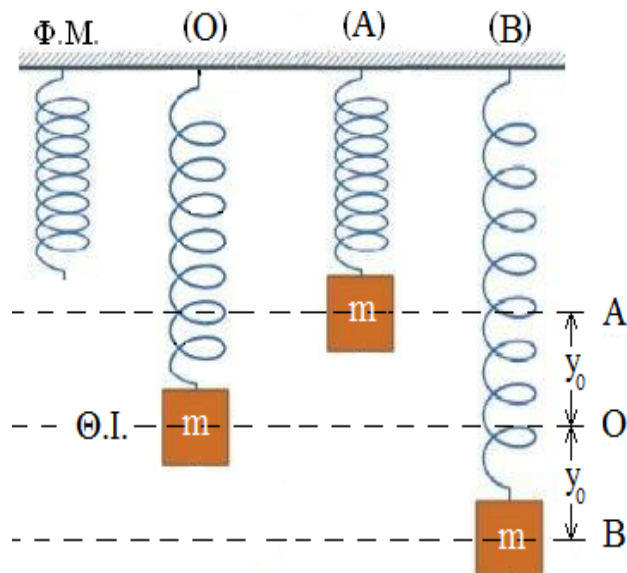
β) $\alpha = -2$.

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΘΕΜΑ 4 14975 3.1 – 3.4 – 3.5

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.



1

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

ΘΕΜΑ 4 21244 3.1 – 3.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

β) Δίνεται η παράσταση A . Να δείξετε ότι $A = -1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ 4 20712 3.4 – 3.5

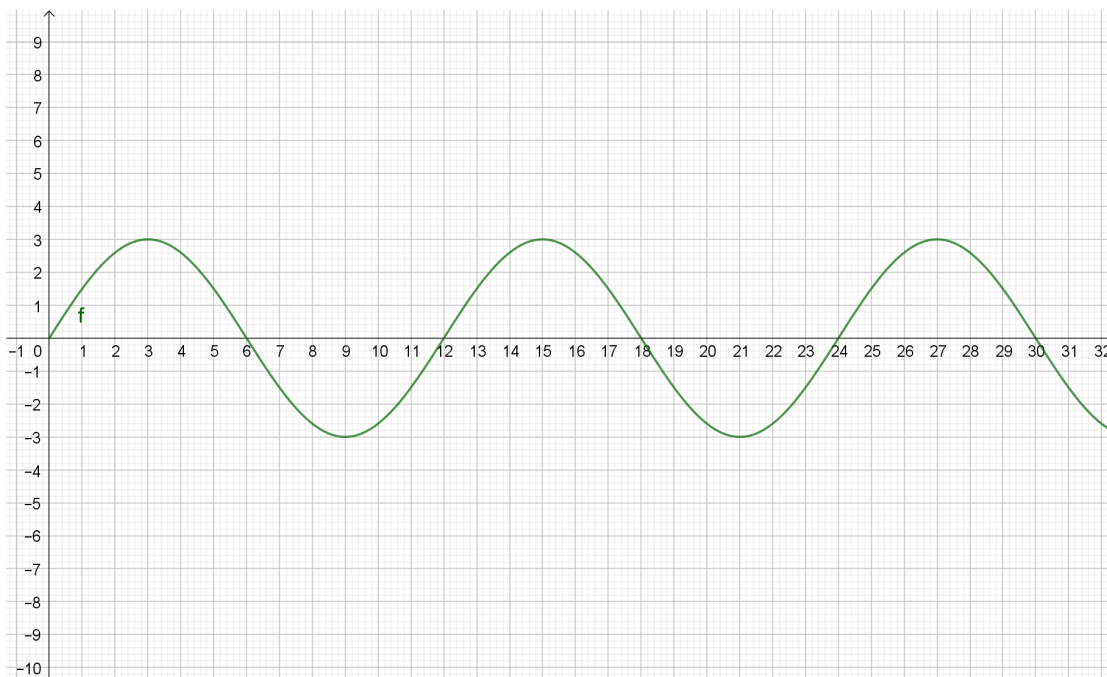
Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.



ΘΕΜΑ 4 20645 2.2 – 3.4 – 3.5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x$ $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$ $\sin x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ 4 15821 3.2 – 3.4 – 3.5

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.