Κεφάλαιο 3ο

3.1

ΘΕΜΑ 2 18868 3.1

α) Να αποδείξετε οτι $\varepsilon\varphi 500° = \varepsilon\varphi 140°$.

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500°$

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500° \cdot \eta\mu 250° \cdot \sigma\upsilon\nu 300°$.

ΘΕΜΑ 2 21161 3.1

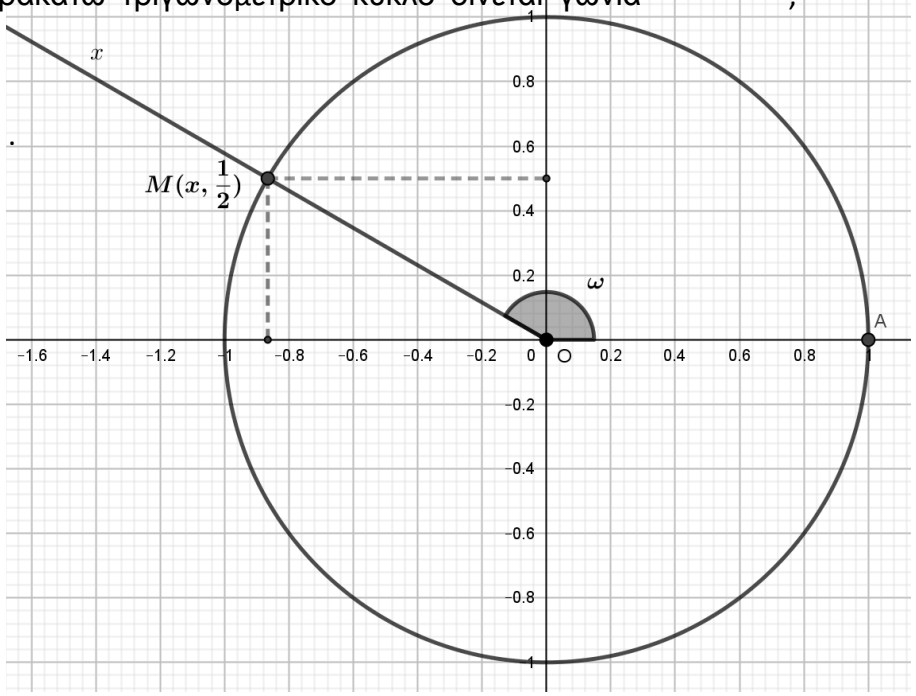
Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ.

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω.

β) Αν ω=2 ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

ΘΕΜΑ 2 20824 3.1 – 3.2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $A\hat{O}x = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.

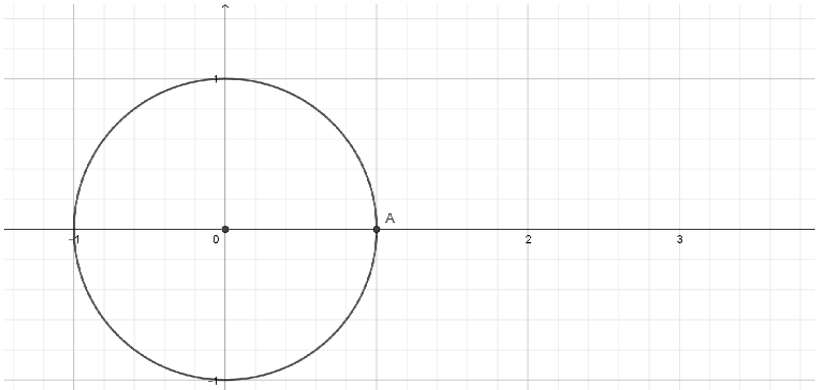


α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M;

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΘΕΜΑ 2 17793 3.1

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 1rad$, $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 2rad$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Delta} = 4rad$.

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3.2

ΘΕΜΑ 2 20817 3.2

Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega}$.

ΘΕΜΑ 2 16000 3.2

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

3.3

ΘΕΜΑ 2 15999 3.2 – 3.3

Δίνεται η παράσταση $A = \text{συν}2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \text{ημ}(\pi + \theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \text{ημ}\theta$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\text{συν}\theta = \frac{12}{13}$.

ΘΕΜΑ 2 21237 3.1 – 3.2 – 3.3

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

ΘΕΜΑ 2 22002 3.3

Δίνεται ότι $\text{ημ}18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

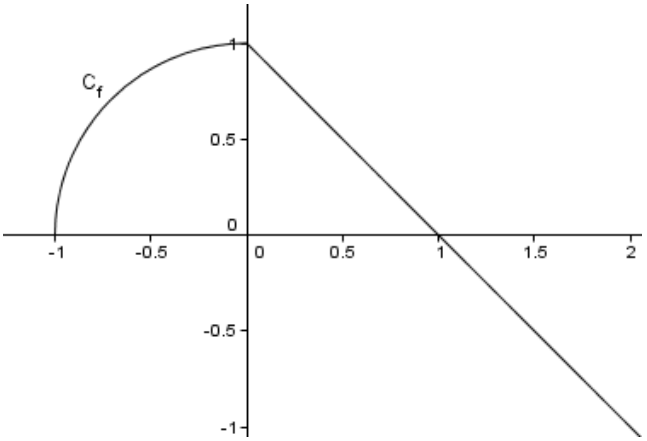
α) $\text{συν}72^{\circ}$

β) $\sigma\upsilon\nu 108^{o}$

γ) $\eta\mu 162^{o}$

ΘΕΜΑ 4 18231 2.1 – 2.2 – 3.3

Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^{o}), f(\eta\mu 120^{o})$

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2),\ x\ge 1$.

3.4

ΘΕΜΑ 2 20660 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(180^\circ-x)+\sigma\upsilon\nu(90^\circ-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β)

i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0\le x\le 2\pi$.

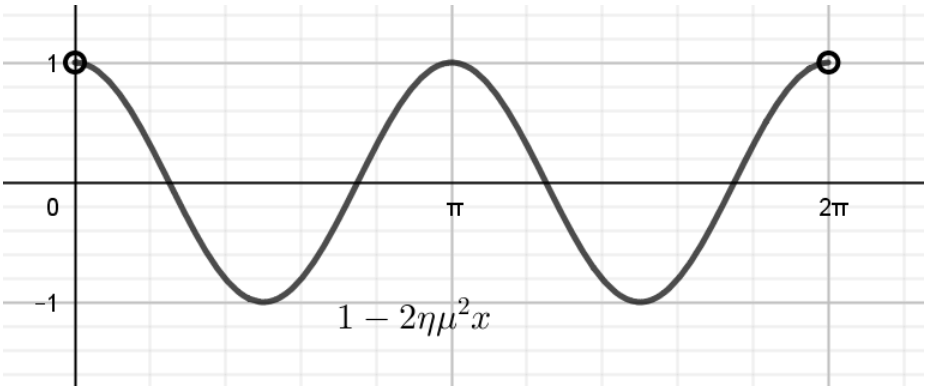
ΘΕΜΑ 2 20867 3.2 – 3.4

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x=0$.

β) Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=1-2\eta\mu^2x$.

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1-2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A=1$, για $0<x<2\pi$.



ΘΕΜΑ 2 20807 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu(-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2\eta\mu x$					

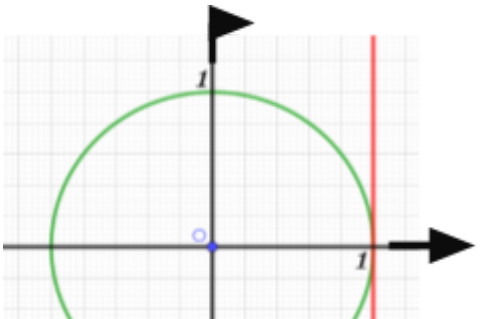
ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0\le x\le 2\pi$.

ΘΕΜΑ 2 16131 3.4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x\in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k\in Z$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



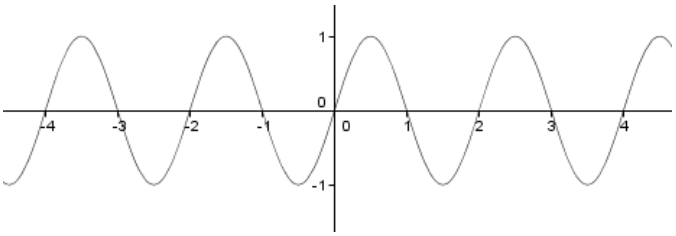
ΘΕΜΑ 2 22003 3.4

Δίδεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

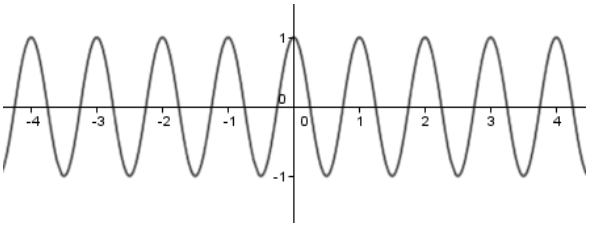
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T} = 1$.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.

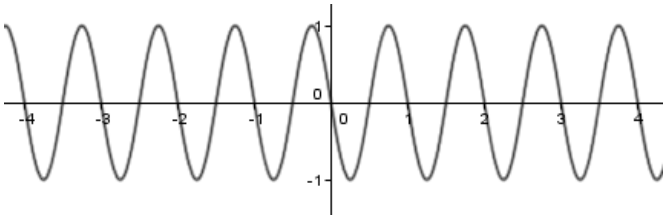
γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



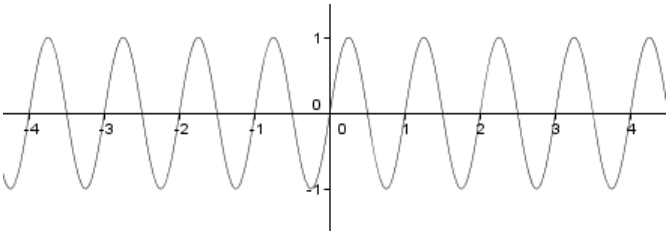
(i)



(ii)



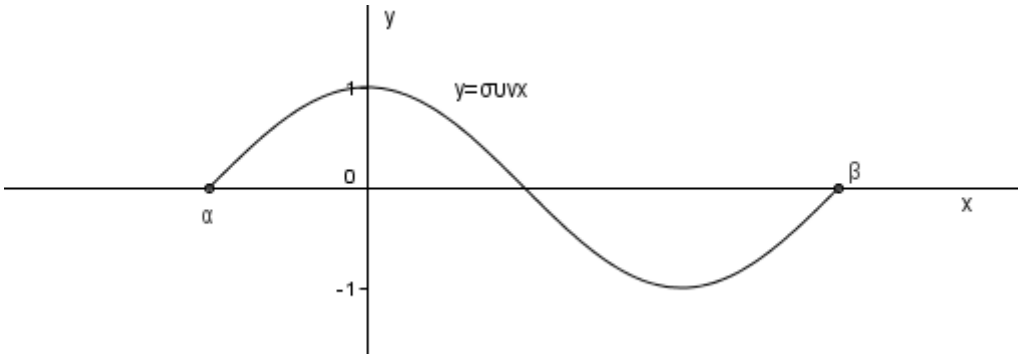
(iii)



(iv)

ΘΕΜΑ 2 22007 3.4

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$.



α) Να βρείτε τα α και β.

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta\mu x$;

ΘΕΜΑ 4 20870 1.1 – 3.4

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2,6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \le t \le 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, με $0 \le t \le 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

i. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον $4,2$ μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

ΘΕΜΑ 4 18234 3.3 – 3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1,\ x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3.5

ΘΕΜΑ 2 21995 3.1 – 3.4 – 3.5

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

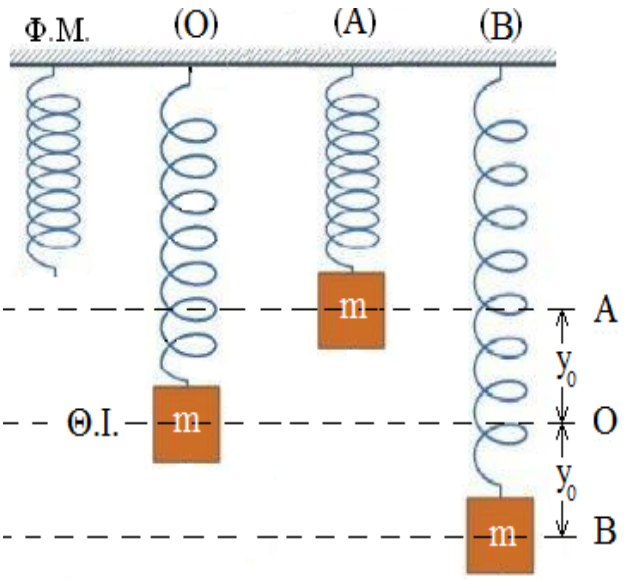
α) $\alpha = 1$.

β) $\alpha = -2$.

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΘΕΜΑ 4 14975 3.1 – 3.4 – 3.5

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με μέτρο.



1

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \bullet \eta\mu\frac{\pi}{2}t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με $1,1$ μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

ΘΕΜΑ 4 21244 3.1 – 3.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

β) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=-1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\mathrm{A}$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

<u>ΘΕΜΑ 4 20712 3.4 – 3.5</u>

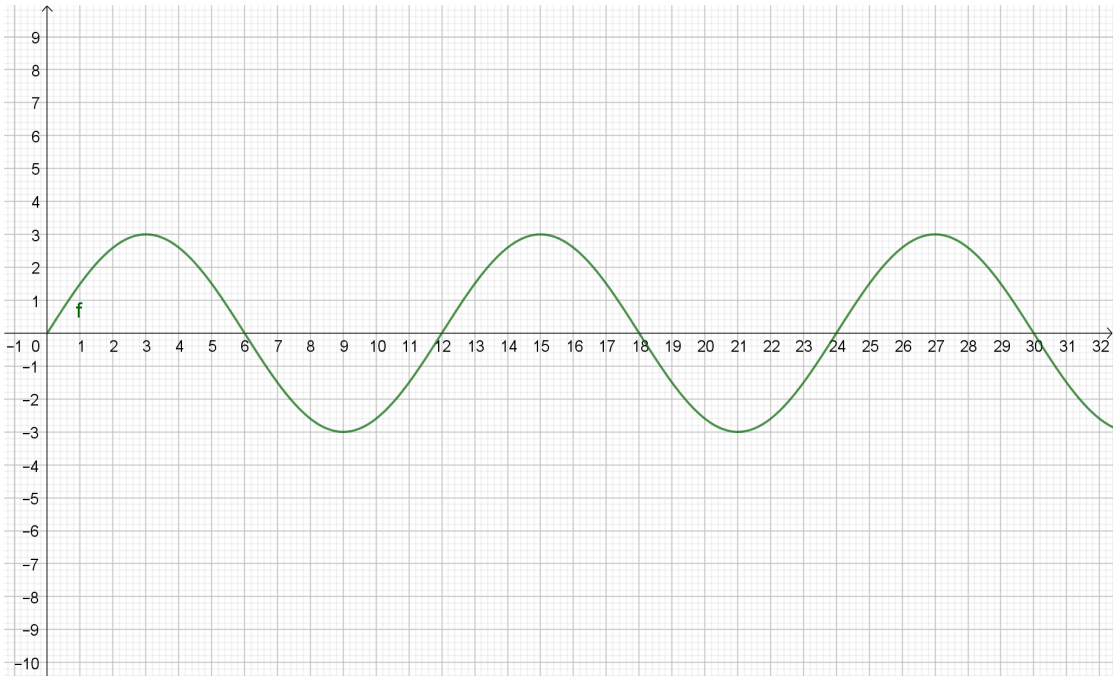
Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f.

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.



ΘΕΜΑ 4 20645 2.2 – 3.4 – 3.5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x\,\text{συν}x,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

ΘΕΜΑ 4 15821 3.2 – 3.4 – 3.5

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x=0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$

και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x<3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.