Aspecte metodice privind predarea-învățarea-evaluarea unității de învățare „Asemănarea triunghiurilor” (Clasa a VII-a)

Prof. Alina Ștefania Lazăr- C. N. Alexandru Lahovari, Rm Vâlcea

Predarea unității de învățare **„Asemănarea triunghiurilor”** face tranziția de la geometria calitativă a formelor izometrice (congruența din clasa a VI-a) la geometria cantitativă a proporționalității și a transformărilor omotetice. În cadrul unui cerc pedagogic, abordarea acestui capitol vizează integrarea rigorii demonstrative cu modelarea situațiilor cotidiene și diferențierea instruirii pe niveluri de performanță.

1. Repere metodice și didactice

Conform Programei școlare pentru Matematică, clasa a VII-a, parcurgerea acestei unități urmărește câteva principii metodologice esențiale:

- **Ancorarea intuitivă și tranziția de la congruență la asemănare.** Se recomandă debutul cu exemple din realitatea imediată (hărți la scară, machete arhitecturale, fotografii redimensionate) pentru a construi intuiția păstrării formei și a modificării dimensiunilor. Congruența se prezintă ca un caz particular al asemănării, corespunzător raportului de asemănare k = 1.
- **Succesiunea logică a conținuturilor.** Parcursul didactic pornește de la segmente proporționale, teorema paralelelor echidistante și Teorema lui Thales (introduse intuitiv, fără demonstrație formală, conform sugestiilor metodologice din programă). Ulterior, se introduc definiția triunghiurilor asemenea, Teorema fundamentală a asemănării (TFA) și cele trei criterii de asemănare (U.U., L.U.L., L.L.L.), construite prin analogie directă cu cazurile de congruență.
- **Prevenirea erorilor tipice ale elevilor.** Cea mai frecventă dificultate constă în scrierea incorectă a rapoartelor de proporționalitate. Se impune formarea deprinderii de a nota vârfurile triunghiurilor asemenea în ordinea exactă a unghiurilor respectiv congruente ($\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$) înainte de extragerea rapoartelor laturilor opuse acestora.
- **Valențe interdisciplinare și instrumente digitale.** Utilizarea software-urilor de geometrie dinamică (precum GeoGebra) permite elevilor să vizualizeze invarianța unghiurilor și constanța rapoartelor la modificarea poziției unei paralele sau a factorului de scară.
- **Deschiderea către unitatea următoare.** Asemănarea triunghiurilor dreptunghice (criteriile particulare U., C.C., C.I.) pregătește terenul pentru deducerea naturală a relațiilor metrice în triunghiul dreptunghic (teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora).

2. Corelația competențe specifice – activități de învățare – evaluare

Pentru o proiectare curriculară coerentă, fiecare competență specifică prevăzută în programa școlară se operaționalizează prin activități de învățare diferențiate și se evaluează prin itemi calibrați pe trei niveluri de performanță:

Competența specifică (Clasa a VII-a)	Conținuturi asociate	Exemple de activități de învățare	Nivelul de performanță vizat
1.6. Identificarea perechilor de triunghiuri asemenea în configurații geometrice date	Segmente proporționale; Teorema lui Thales; Triunghiuri asemenea; T.F.A.	Exerciții de recunoaștere a triunghiurilor asemenea pe figuri cu paralele, secante sau triunghiuri suprapuse; colorarea unghiurilor congruente pentru identificarea vârfurilor omoloage.	Nivel de bază (reproducere, recunoaștere, calcul direct)
2.6. Stabilirea relației de asemănare între două triunghiuri prin metode diferite	Criteriile de asemănare a triunghiurilor (U.U., L.U.L., L.L.L.); Reciproca T. lui Thales	Activități pe grupe de verificare a paralelismului a două drepte folosind rapoarte de segmente; alegerea criteriului optim de asemănare în funcție de datele ipotezei.	Nivel consolidat (aplicare în contexte standard, demonstrații scurte)
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri de unghiuri și arii	Raportul perimetrelor și raportul ariilor a două triunghiuri asemenea; Linia mijlocie; Centrul de greutate	Rezolvarea de probleme cu grad sporit de complexitate ce îmbină proprietățile patrulaterelor particulare, ale liniilor importante în triunghi și raportul ariilor (k^2).	Nivel consolidat / avansat (transfer, conexiuni intra-disciplinare)
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților referitoare la asemănări	Notația simbolică a asemănării; Redactarea etapelor unei demonstrații	Exerciții de redactare riguroasă a demonstrațiilor; corectarea unor rezolvări greșite (analiza erorilor de corespondență a vârfurilor).	Toate nivelurile (structurarea discursului matematic)
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în corelație cu proprietăți calitative și/sau metrice	Construcții geometrice; Relații metrice pregătitoare	Probleme de demonstrație cu construcții ajutătoare (ducerea unei paralele printr-un punct convenabil ales pentru a genera configurații Thales / T.F.A.).	Nivel avansat (analiză, sinteză, raționament deductiv complex)
6.6. Aplicarea asemănării triunghiurilor în rezolvarea unor probleme matematice sau practice	Aplicații practice ale asemănării (măsurarea indirectă a distanțelor/ înălțimilor)	Proiecte practice / studii de caz: calcularea înălțimii unui copac sau a unei clădiri folosind lungimea umbrei sau o oglindă așezată pe sol.	Nivel consolidat / avansat (modelare matematică a realității)

3. Exemple de itemi diferențiați pe niveluri de performanță

Setul de itemi de mai jos ilustrează progresia cognitivă (de la cunoaștere și înțelegere la aplicare, analiză și transfer) și poate constitui suportul unei fișe de evaluare diferențiate sau al unui test sumativ.

A. Nivelul de bază (Standard / Minimal)

Vizează competențele specifice 1.6 și 4.6 (identificare directă, aplicarea algoritmică a rapoartelor de asemănare).

- **Item 1 (Obiectiv – alegere multiplă).**
  În triunghiul ABC, punctele M ∈ (AB) și N ∈ (AC) sunt astfel încât MN // BC. Știind că AM = 4 cm, MB = 6 cm și BC = 15 cm, lungimea segmentului MN este egală cu: a) 10 cm; b) 6 cm; c) 9 cm; d) 5 cm.
  - **Indicație metodică:** Se verifică dacă elevul raportează AM la întregul segment AB = AM + MB = 10 cm (AM / AB = MN / BC ⇒ 4 / 10 = MN / 15 ⇒ MN = 6 cm), evitând confuzia dintre Teorema lui Thales și Teorema fundamentală a asemănării.
- **Item 2 (Semiobiectiv – completare).**
  Se consideră ΔDEF ~ ΔPQR cu raportul de asemănare k = 2/3. Dacă perimetrul triunghiului DEF este 24 cm, atunci perimetrul triunghiului PQR este egal cu …… cm, iar dacă m(∢E) = 55°, atunci m(∢Q) = ……°.
  - **Răspuns:** P(PQR) = 36 cm; m(∢Q) = 55°.

B. Nivelul consolidat (Mediu)

Vizează competențele specifice 2.6, 3.6 și 6.6 (alegerea criteriului de asemănare, corelarea cu proprietățile patrulaterelor și modelarea practică).

- **Item 3 (Subiectiv – rezolvare de probleme).**
  Fie trapezul ABCD cu bazele AB // CD, AB = 18 cm, CD = 12 cm, iar diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O. a) Demonstrați că ΔOAB ~ ΔOCD și precizați raportul de asemănare. b) Știind că AC = 20 cm, calculați lungimile segmentelor OA și OC. c) Dacă aria triunghiului OCD este 24 cm², determinați aria triunghiului OAB.
  - **Schiță de rezolvare:** a) Criteriul U.U. (∢OAB ≡ ∢OCD alterne interne și ∢AOB ≡ ∢COD opuse la vârf), k = AB / CD = 18 / 12 = 3/2. b) Din OA / OC = 3/2 și OA + OC = 20 cm rezultă OA = 12 cm și OC = 8 cm. c) A(OAB) / A(OCD) = k² = 9/4 ⇒ A(OAB) = 54 cm².
- **Item 4 (Modelare practică – aplicație interdisciplinară).**
  Pentru a determina înălțimea unui stâlp de iluminat, un elev așază o oglindă plană pe sol, orizontal, la o distanță de 6 m de baza stâlpului. Elevul se îndepărtează pe aceeași direcție până la 1,5 m de oglindă, moment în care vede vârful stâlpului reflectat în centrul oglinzii. Știind că ochii elevului se află la 1,6 m deasupra solului și că unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie, calculați înălțimea stâlpului.
  - **Schiță de rezolvare:** Se formează două triunghiuri dreptunghice asemenea (criteriul U.U.). Raportul înălțimilor este egal cu raportul distanțelor până la oglindă: H / 1,6 = 6 / 1,5 = 4 ⇒ H = 6,4 m.

C. Nivelul avansat (Performanță / Excelență)

Vizează competențele specifice 3.6 și 5.6 (raționament deductiv multi-etapizat, construcții geometrice ajutătoare).

- **Item 5 (Subiectiv – demonstrație și calcul cu construcție ajutătoare).**
  În triunghiul ABC, punctul D ∈ (BC) astfel încât BD / DC = 2/3, iar punctul M este mijlocul segmentului AD. Dreapta BM intersectează latura AC în punctul E. a) Demonstrați că AE / EC = 2/5. b) Stabiliți raportul ariilor triunghiurilor AME și ABC.

- **Strategie metodică de rezolvare:** Se duce construcția ajutătoare DF // BE, cu F ∈ (AC). În ΔADF, deoarece M este mijlocul lui AD și ME // DF, rezultă că ME este linie mijlocie, deci AE = EF. În ΔBCE, din DF // BE și Teorema lui Thales rezultă EF / FC = BD / DC = 2/3. Notând AE = EF = 2x, obținem FC = 3x, deci EC = EF + FC = 5x ⇒ AE / EC = 2/5. Pentru raportul ariilor: A(AME) = (1/2)·A(ADE), A(ADE) = (2/7)·A(ADC) și A(ADC) = (3/5)·A(ABC). Prin înmulțire, A(AME) / A(ABC) = (1/2) · (2/7) · (3/5) = 3/35.

- **Item 6 (Subiectiv – problemă de sinteză).**
  Fie triunghiul ascuțitunghic ABC în care BD ⊥ AC (D ∈ AC) și CE ⊥ AB (E ∈ AB). a) Demonstrați că ΔABD ~ ΔACE. b) Demonstrați că ΔADE ~ ΔABC (triunghiul ortic). c) Știind că m(∢BAC) = 60°, determinați raportul dintre perimetrul triunghiului ADE și perimetrul triunghiului ABC.
  - **Schiță de rezolvare:** a) Triunghiuri dreptunghice cu unghiul ∢A comun (criteriul U.U.). b) Din a) rezultă AD / AE = AB / AC ⇔ AD / AB = AE / AC; cum ∢DAE ≡ ∢BAC (unghi comun), conform criteriului L.U.L., ΔADE ~ ΔABC. c) În ΔABD dreptunghic cu m(∢A) = 60°, m(∢ABD) = 30° ⇒ AD = AB / 2, deci raportul de asemănare este k = AD / AB = 1/2, iar raportul perimetrelor este tot 1/2.

4. Sugestii și exemple concrete pentru dezbatere

Pentru a susține prezentarea cu repere practice direct aplicabile la clasă sunt propuse trei direcții de reflecție metodică, însoțite de exemple concrete de instrumente didactice:

4.1. Gestionarea timpului alocat demonstrațiilor versus calculului numeric (în perspectiva Evaluării Naționale)

- **Problematica metodică:** Subiectele de Evaluare Națională îmbină itemii de calcul rapid (Subiectul al II-lea) cu cei de redactare riguroasă (Subiectul al III-lea). Profesorul trebuie să evite atât transformarea geometriei într-un simplu „rețetar” de formule, cât și blocarea elevilor de nivel mediu în demonstrații excesiv de formaliste.
- **Soluție practică propusă – „Demonstrația schelet” (fișa cu spații lacunare):** Această tehnică scurtează timpul de scriere la tablă sau pe fișă, menținând rigoarea raționamentului și pregătind treptat elevul pentru redactarea completă.

Exemplu concret la clasă – Fișă de lucru cu demonstrație lacunară (Nivel consolidat)

Enunț: În ΔABC, punctele M ∈ (AB) și N ∈ (AC) sunt astfel încât AM = 3 cm, MB = 6 cm, AN = 4 cm și NC = 8 cm. Arătați că ΔAMN ~ ΔABC.

Sarcina elevului (completează spațiile punctate):

1. Calculăm rapoartele: AM / AB = 3 / (3 + 6) = …… și AN / AC = …… / (4 + 8) = ……

2. Observăm că AM / AB = …… / …… (au aceeași valoare egală cu ……).

3. Deoarece unghiul …… este comun celor două triunghiuri, conform criteriului de asemănare …… , rezultă că ΔAMN ~ ΔABC.

4.2. Utilizarea metodei „înainte și înapoi” (analiza și sinteza) în problemele cu construcții ajutătoare

- **Problematica metodică:** Pentru elevii capabili de performanță, principala barieră în problemele de tip olimpiadă sau Subiectul al III-lea (partea b) nu este aplicarea teoremelor, ci descoperirea construcției ajutătoare (ducerea unei paralele convenabile).

- **Soluție practică propusă – Dialogul euristic dirijat (de la concluzie spre ipoteză):** În loc să ofere direct construcția, profesorul ghidează clasa printr-o succesiune de întrebări scurte, pornind de la ce trebuie demonstrat (analiza) și revenind apoi la redactarea logică (sinteza).

> **Exemplu concret de dialog euristic (aplicat pe Itemul 5: BD/DC = 2/3, M mijlocul lui AD, BM ∩ AC = {E})**
>
> **Pasul 1 – Analiza („înapoi", pornind de la concluzie):** Profesorul întreabă: „Vrem să aflăm raportul AE / EC pe latura AC. Ce teoremă ne dă rapoarte de segmente pe o latură a unui triunghi?" → Elevii: „Teorema lui Thales." → Profesorul: „Avem vreo paralelă în figură? Nu. Putem construi una? Prin ce punct dat în ipoteză ar fi util să ducem o paralelă la dreapta BM (sau BE)?" → Elevii identifică punctul D (care împarte latura BC în raportul 2/3).
>
> **Pasul 2 – Concretizarea construcției:** Construim DF ∥ BE, cu F ∈ (AC). Astfel, punctul E se „descompune" în două segmente: EF și FC.
>
> **Pasul 3 – Sinteza („înainte", redactarea):** Acum elevii văd cele două triunghiuri standard: ΔADF (unde ME este linie mijlocie ⇒ AE = EF) și ΔBCE (unde DF ∥ BE ⇒ EF / FC = BD / DC = 2/3), finalizând rapid calculul.

4.3. Instrumente de autoevaluare și interevaluare pentru prevenirea erorilor de corespondență a vârfurilor

- **Problematica metodică:** Cea mai frecventă greșeală în acest capitol constă în scrierea aleatorie a vârfurilor triunghiurilor asemenea (ex. ΔABC ~ ΔDEF în loc de ΔABC ~ ΔDFE), eroare care invalidează toate rapoartele ulterioare.
- **Soluție practică propusă – Exercițiul „Vânătoarea de erori" și Checklist-ul în 3 pași:** În ultimele 5–7 minute ale orei de fixare, elevii primesc o rezolvare intenționat greșită pe care o corectează în perechi, folosind o grilă de autoverificare.

> **Exemplu concret – Item de interevaluare („Găsește și repară eroarea!") & Checklist**
>
> **Textul propus elevilor spre corectare:** „În ΔABC dreptunghic în A, ducem înălțimea AD ⊥ BC (D ∈ BC). Avem ∢ADB = ∢BAC = 90° și ∢B comun, deci ΔABD ~ ΔABC. Rezultă rapoartele: AB / AB = BD / BC = AD / AC."
>
> **Ce trebuie să identifice elevii:** Deși triunghiurile au fost identificate corect, vârfurile nu au fost scrise în ordinea unghiurilor congruente (∢ADB = 90° corespunde lui ∢BAC = 90°, nu lui ∢ABC). Scrierea corectă este ΔDBA ~ ΔABC (sau ΔABD ~ ΔCBA), de unde rezultă AB / BC = BD / BA = AD / AC (teorema catetei).
>
> **Grila de autoverificare a elevului (Checklist în 3 pași):** 1) Am marcat cu culori/simboluri identice unghiurile respectiv congruente? 2) Am așezat vârfurile în ordinea exactă a unghiurilor egale? 3) Am extras rapoartele după regula pozițiilor (literele 1-2 / 1-2; 2-3 / 2-3; 1-3 / 1-3)?