1.-

a) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:
$x + 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 160$, $x + y \leq 70$, y determine sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \geq 80 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 80$

x	0	80
y	40	0

$x = 0$, $0 + 2y = 80$, $y = 40$
$y = 0$, $x + 2.0 = 80$, $x = 80$

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \geq 80$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$3x + 2y \geq 160 \rightarrow$ Recta: $3x + 2y = 160$

x	0	50
y	80	5

$x = 0$, $3.0 + 2y = 160$, $y = 80$
$y = 5$, $3x + 2.5 = 160$, $x = 50$

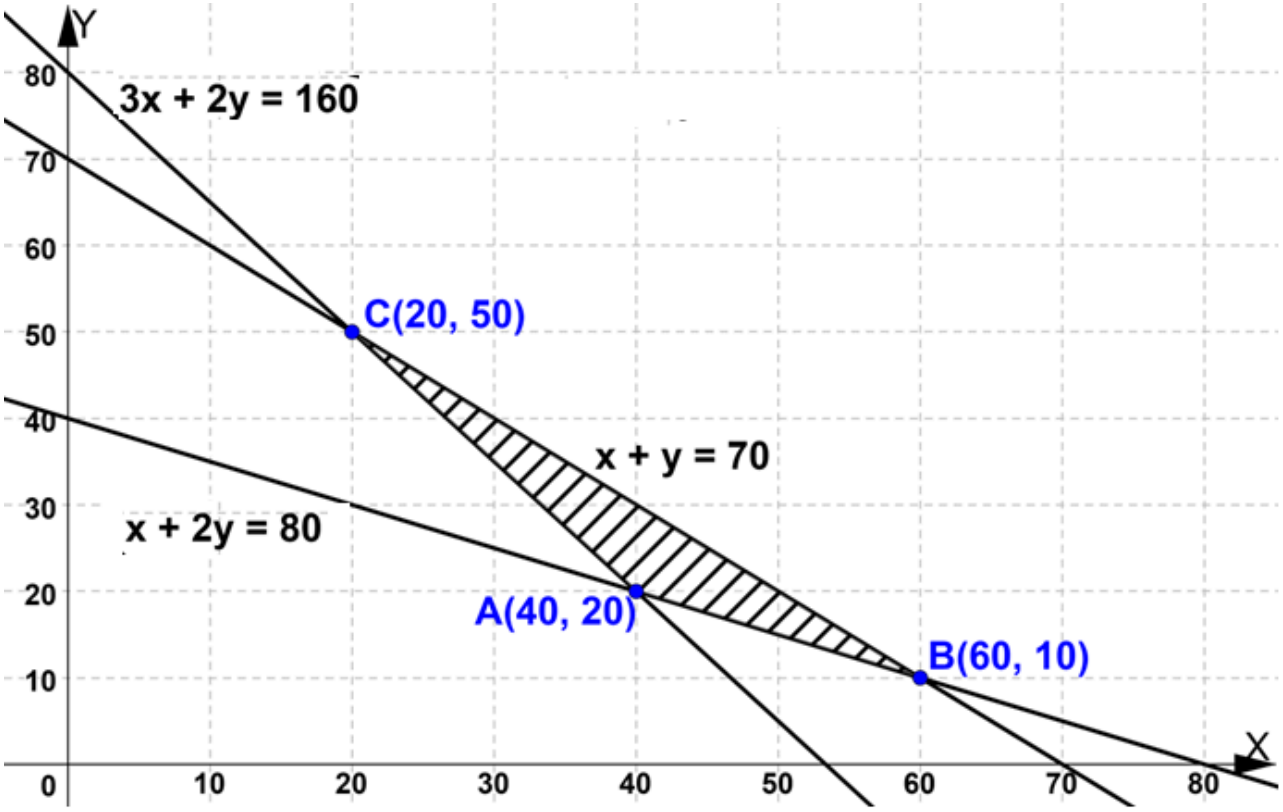
$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 2.0 \geq 160$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$x + y \leq 70 \rightarrow$ Recta: $x + y = 70$; $x = 0$, $0 + y = 70$, $y = 70$; $y = 0$, $x + 0 = 70$, $x = 70$

x	0	70
y	70	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 70$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{3x + 2y = 160\ x + 2y = 80$; restando, $2x = 80$, $x = 40$; $40 + 2y = 80$, $y = 20 \Rightarrow A(40, 20)$

$\{x + y = 70\ x + 2y = 80$; restando, $y = 10$; $x + 10 = 70$, $x = 60 \Rightarrow B(60, 10)$

$\{3x + 2y = 160\ x + y = 70$. 2 $\rightarrow \{3x + 2y = 160\ 2x + 2y = 140$; restando,
$x = 20$; $20 + y = 70$, $y = 50 \Rightarrow C(20, 50)$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función F(x, y) = 9x + 8y – 5 en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo y mínimo la función F:

$$F(A) = F(40, 20) = 9.40 + 8.20 - 5 = 515 \qquad F(B) = F(60, 10) = 9.60 + 8.10 - 5 = 615$$

$$F(C) = F(20, 50) = 9.20 + 8.50 - 5 = 575$$

El valor mínimo es 515 y se alcanza en el punto A, x = 40, y = 20

El valor máximo es 615 y se alcanza en el punto B, x = 60, y = 10

2.- (prueba ordinaria) Sea el siguiente sistema de inecuaciones
$\{-5x + 3y \leq 2 \quad -x + 2y \geq 6\ 2x + 3y \leq 37$
a) Represente el conjunto solución y determine sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$-5x + 3y \leq 2 \rightarrow$ Recta: $-5x + 3y = 2$

x	2	–1
y	4	–1

x = 2, $-5.2 + 3y = 2$, y = 4
y = –1, $-5x + 3(-1) = 2$, x = –1

(0, 0) → $-5.0 + 3.0 \leq 2$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$-x + 2y \geq 6 \rightarrow$ Recta: $-x + 2y = 6$

x	0	–6
y	3	0

x = 0, $0 + 2y = 6$, y = 3
y = 0, $-x + 2.0 = 6$, x = –6

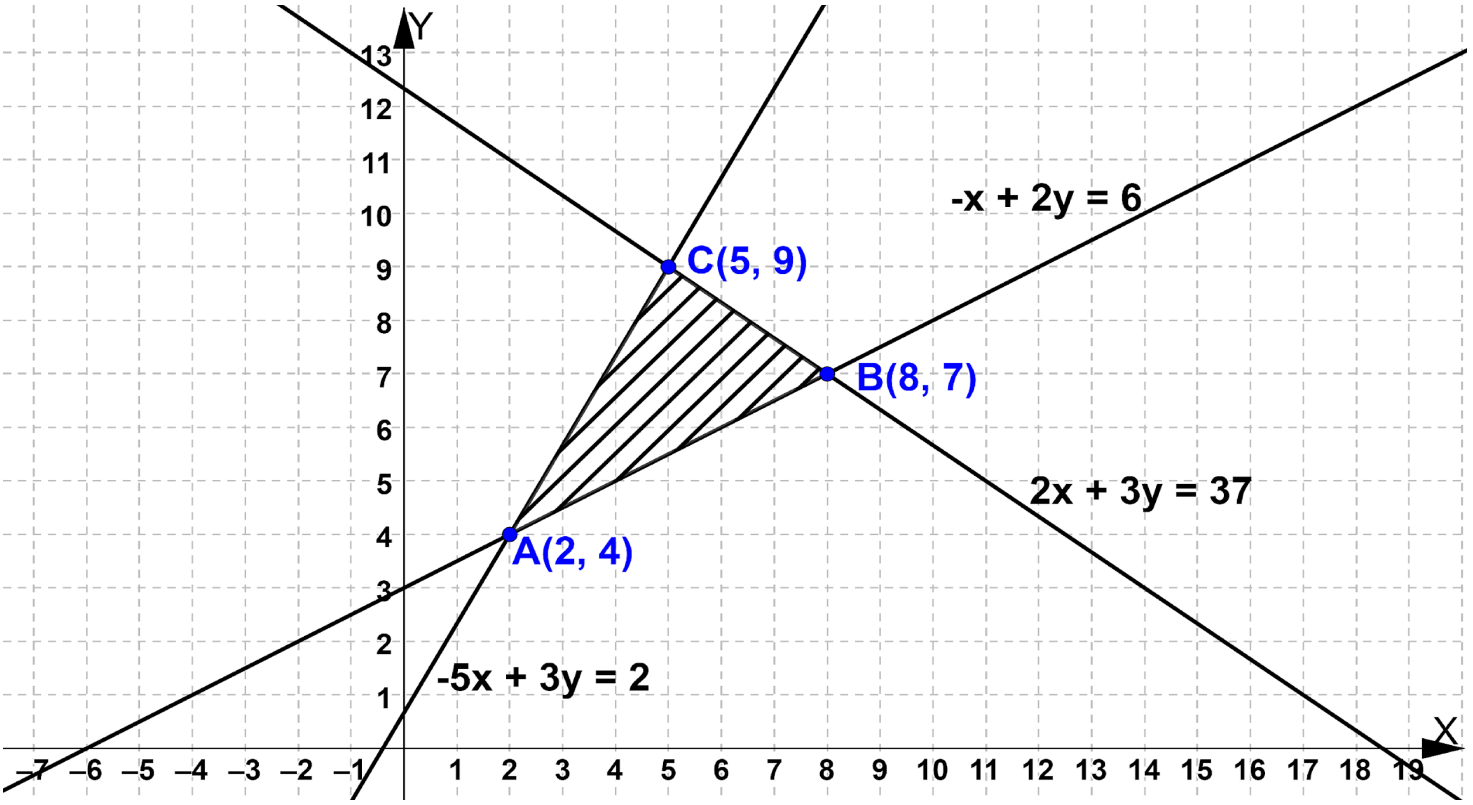
(0, 0) → $0 + 2.0 \geq 6$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$2x + 3y \leq 37 \rightarrow$ Recta: $2x + 3y = 37$; x = –1, $2(-1) + 3y = 37$, y = 13 ; y = 1, $2x + 3.1 = 37$, x = 17

x	–1	17
y	13	1

(0, 0) → $2.0 + 3.0 \leq 37$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{-5x+3y=2 \quad -x+2y=6 \quad .5 \rightarrow \{-5x+3y=2 \quad -5x+10y=30$; restando,

$7y=28,\ y=4 \quad ; \quad -x+2.4=6,\ x=2 \Rightarrow A(2,\ 4)$

$\{2x+3y=37 \quad -x+2y=6 \quad .2 \rightarrow \{2x+3y=37 \quad -2x+4y=12$; sumando,

$7y=49,\ y=7 \quad ; \quad -x+2.7=6,\ x=8 \Rightarrow B(8,\ 7)$

$\{2x+3y=37 \quad -5x+3y=2$; restando, $7x=35,\ x=5 \quad ; \quad 2.5+3y=37,\ 3y=27,\ y=9 \Rightarrow C(5,\ 9)$

b) Halle el punto del recinto anterior en el cual la función F(x, y) = –2x + 5y alcanza su valor máximo.

Resolución

Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo la función F:

F(A) = F(2, 4) = –2.2 + 5.4 = 16 F(B) = F(8, 7) = –2.8 + 5.7 = 19

F(C) = F(5, 9) = –2.5 + 5.9 = 35

El valor máximo es 35 y se alcanza en el punto C(5, 9), x = 5, y = 9

3.- (prueba extraordinaria) Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.
La producción diaria debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso. La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola. El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm. Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material, para obtener la máxima ganancia y determine dicha ganancia.

Resolución

Nº de Tm de escayola: x Nº de Tm de yeso: y

Las restricciones son $\{x \geq 30\ y \geq 30\ y \leq x+60\ 3x+y \leq 420\ x \geq 0, y \geq 0$. Función a optimizar (maximizar): ganancia f(x, y) = 150x + 100y
Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x \geq 30 \rightarrow$ Recta: $x = 30$, vertical que pasa por $(30, 0)$.

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 30$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al $(0, 0)$.

$y \geq 30 \rightarrow$ Recta: $y = 30$, horizontal que pasa por $(0, 30)$.

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 30$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al $(0, 0)$.

$y \leq x + 60 \rightarrow$ Recta: $y = x + 60$

x	0	−6 0
y	6 0	0

$x = 0,\ y = 0 + 60,\ \ y = 60$
$y = 0,\ 0 = x + 60,\ x = -60$

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 0 + 60$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$3x + y \leq 420 \rightarrow$ Recta: $3x + y = 420$

$x = 0,\ 3.0 + y = 420,\ \ y = 420$
$y = 0,\ 3x + 0 = 420,\ \ x = 140$

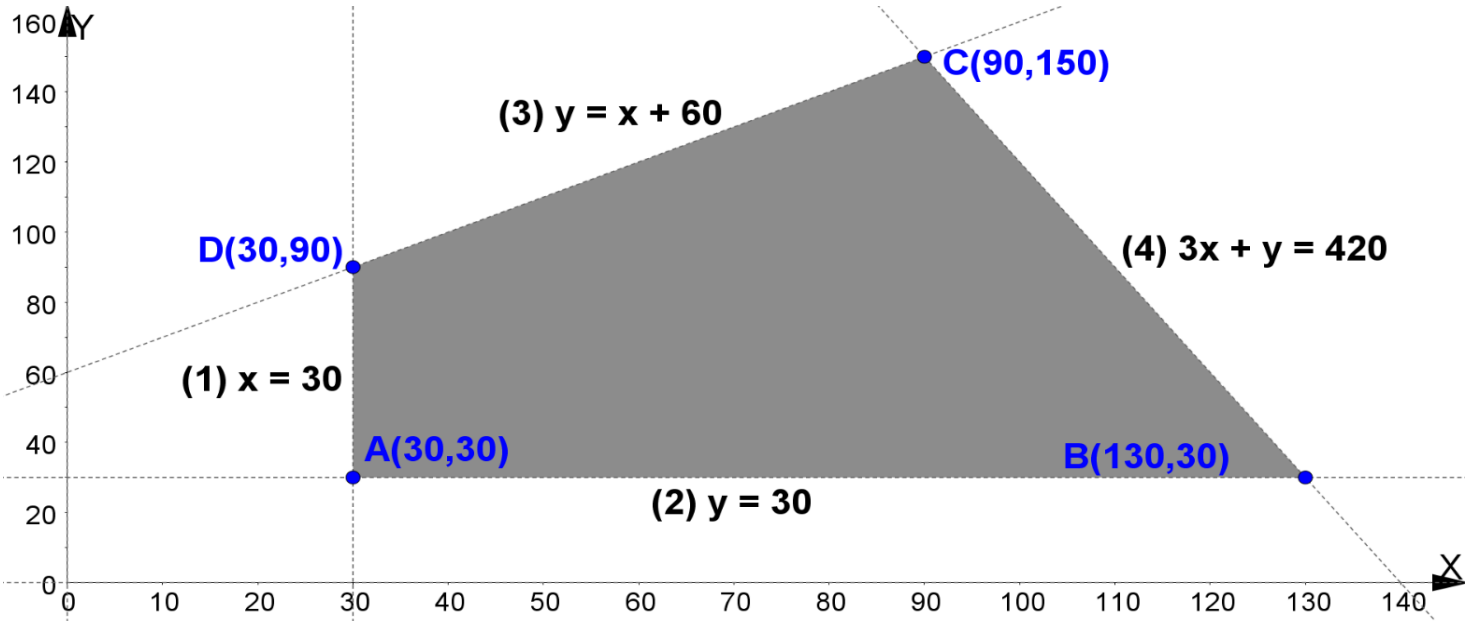
x	0	14 0
y	42 0	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 0 \leq 420$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{x = 30\ y = 30 \Rightarrow A(30, 30)$ $\quad \{3x + y = 420\ y = 30\ ;\ 3x + 30 = 420,\ 3x = 390,\ x = 130 \Rightarrow B(130, 30)$

$\{3x + y = 420\ y = x + 60\ ;\ 3x + x + 60 = 420,\ 4x = 360,\ x = 90\ ;\quad y = 90 + 60 = 150 \Rightarrow C(90, 150)$

$\{x = 30\ y = x + 60\ ;\ y = 30 + 60 = 90 \Rightarrow D(30, 90)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 150x + 100y$:

$f(A) = f(30, 30) = 150.30 + 100.30 = 7500$; $f(B) = f(130, 30) = 150.130 + 100.30 = 22500$

$f(C) = f(90, 150) = 150.90 + 100.150 = 28500$; $f(D) = f(30, 90) = 150.30 + 100.90 = 13500$

La ganancia máxima es de 28500 € y se obtiene produciendo 90 Tm de escayola y 150 Tm de yeso.

4.- Una empresa fabrica sofás de dos tipos, A y B, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente. Al menos se deben fabricar 6 sofás del tipo A y 10 del tipo B, por semana, y, además, el número de los del tipo A no debe superar en más de 6 unidades al número de los del B. ¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

Resolución

Nº de sofás tipo A: x Nº de sofás tipo B: y

Las restricciones son $\{x \geq 6\ y \geq 10\ x \leq y + 6\ x + y \leq 30\ x \geq 0, y \geq 0$. La función a maximizar es el beneficio, $f(x, y) = 1500x + 2000y$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x \geq 6 \rightarrow$ Recta: $x = 6$, vertical que pasa por (6, 0).

(0, 0)$\rightarrow 0 \geq 6$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$y \geq 10 \rightarrow$ Recta: $y = 10$, horizontal que pasa por (0, 10).

(0, 0)$\rightarrow 0 \geq 10$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$x \leq y + 6 \rightarrow$ Recta: $x = y + 6$

x	0	6
y	–6	0

$x = 0,\quad 0 = y + 6,\quad y = -6$
$y = 0,\quad x = 0 + 6,\quad x = 6$

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 0 + 6$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + y \leq 30 \rightarrow$ Recta: $x + y = 30$

$x = 0,\ 0 + y = 30,\quad y = 30$
$y = 0,\ x + 0 = 30,\quad x = 30$

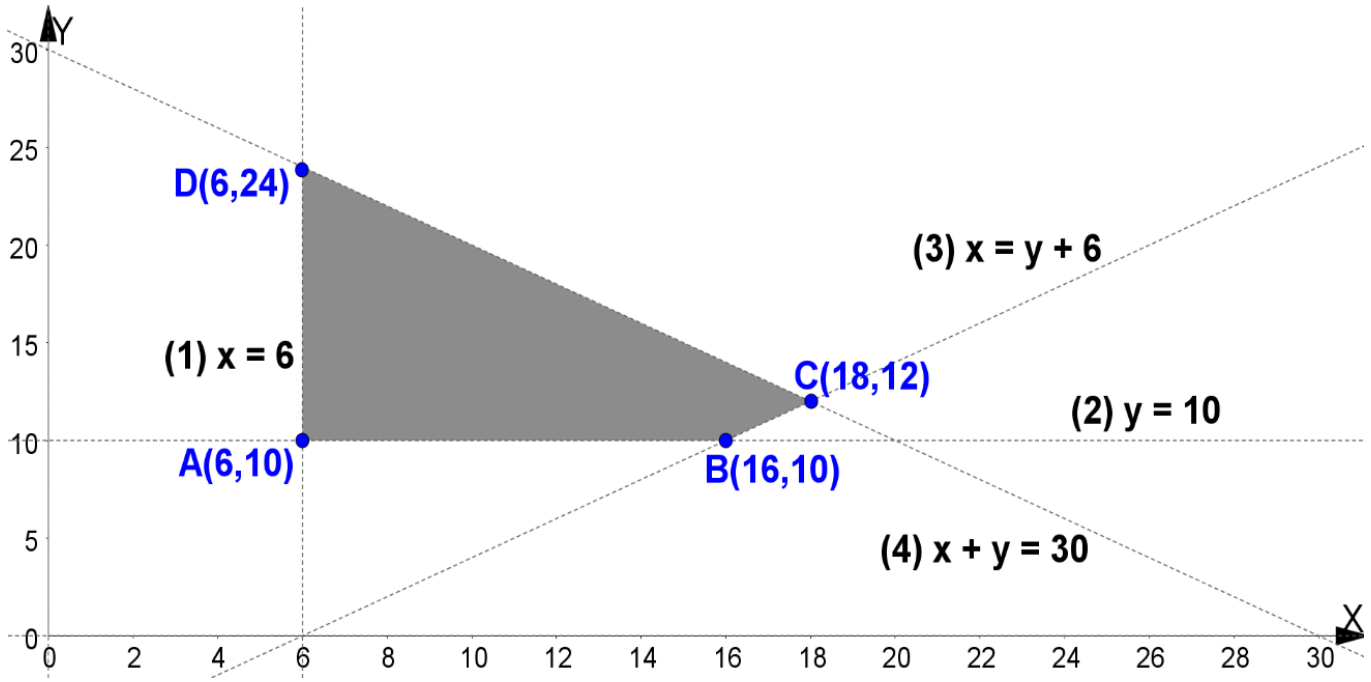
x	0	30
y	30	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 30$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
(1, 0) $\rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
(0, 1) $\rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{x = 6\ y = 10 \Rightarrow A(6,\ 10)$ $\{x = y + 6\ y = 10\ ;\ x = 10 + 6 = 16 \Rightarrow B(16,\ 10)$

$\{x + y = 30\ x = y + 6\ ;\ y + 6 + y = 30,\ 2y = 24,\ y = 12$; $x = 12 + 6 = 18 \Rightarrow C(18,\ 12)$

$\{x = 6\ x + y = 30\ ;\ 6 + y = 30,\ y = 24 \Rightarrow D(6,\ 24)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo f(x, y) = 1500x + 2000y:

f(A) = f(6, 10) = 1500.6 + 2000.10 = 29000 ; f(B) = f(16, 10) = 1500.16 + 2000.10 = 44000

f(C) = f(18, 12) = 1500.18 + 2000.12 = 51000 ; f(D) = f(6, 24) = 1500.6 + 2000.24 = 57000

El beneficio máximo es 57000 € y se obtiene fabricando 6 sofás del tipo A y 24 del tipo B.

5.-

a) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \geq 1$, $y \leq x$, $x \leq 2$. Determine sus vértices.

Resolución

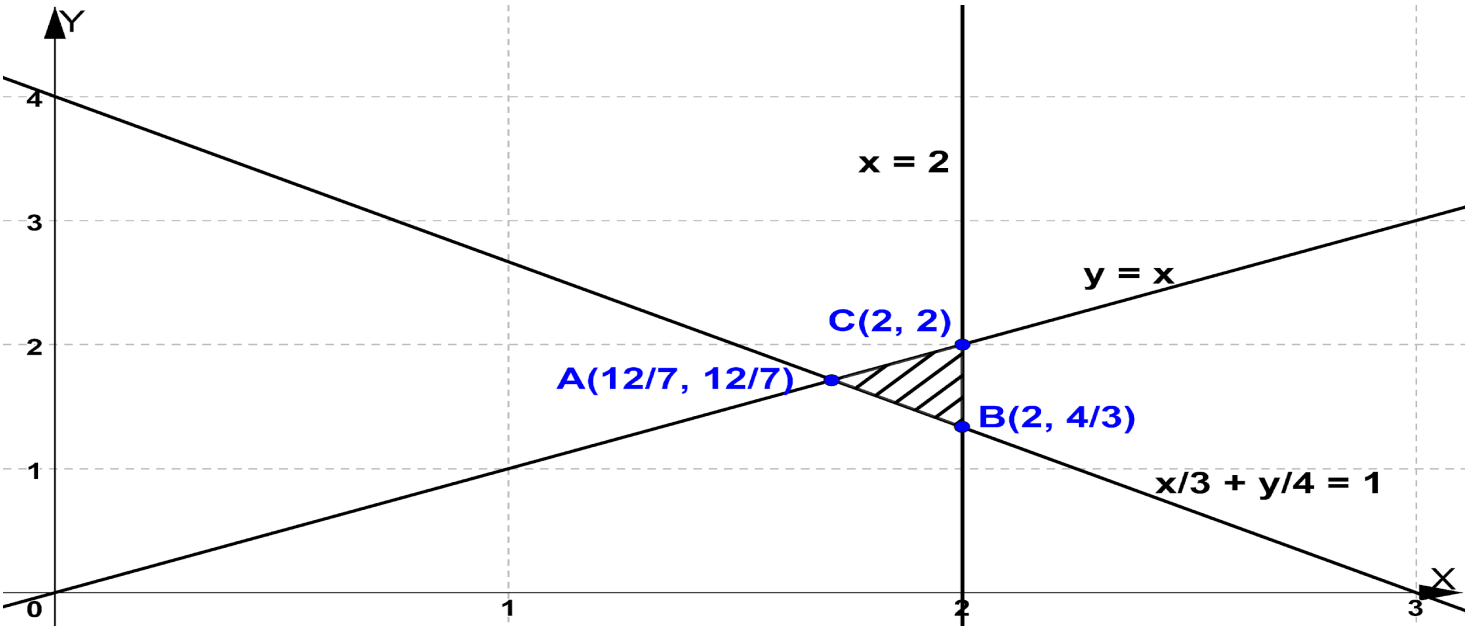
Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \geq 1 \rightarrow 4x + 3y \geq 12 \rightarrow$ Recta: $4x + 3y = 12$ x: 0, 3 y: 4, 0 $x = 0,\quad 4.0 + 3y = 12,\quad y = 4$ $y = 0,\quad 4x + 3.0 = 12,\quad x = 3$ $(0, 0) \rightarrow 4.0 + 3.0 \geq 12$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).	$y \leq x \rightarrow$ Recta: $y = x$ x: 1, 0 y: 3, 0 $x = 0,\quad y = 0$ $x = 1,\quad y = 1$ $(1, 0) \rightarrow 0 \leq 1$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$x \leq 2 \rightarrow$ Recta: $x = 2$, vertical que pasa por (2, 0).

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 2$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{y = x\, 4x + 3y = 12\,;\ 4x + 3x = 12,\ x = \frac{12}{7} = y \Rightarrow A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$

$\{4x + 3y = 12\, x = 2\,;\ 4.2 + 3y = 12,\ y = \frac{4}{3} \Rightarrow B\left(2, \frac{4}{3}\right)$ $\{x = 2\, y = x\,;\ x = y = 2 \Rightarrow C(2, 2)$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función F(x, y) = –x + 2y – 3 en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

Resolución

$$F(A) = F\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) = -\frac{12}{7} + 2\,\frac{12}{7} - 3 = \frac{-9}{7} \cong -1,3$$

$F(A) = F\left(2, \frac{4}{3}\right) = -2 + 2\,\frac{4}{3} - 3 = \frac{-7}{3} \cong -2,3$ F(C) = F(2, 2) = –2 + 2.2 – 3 = –1

El valor mínimo es –7/3 y se alcanza en el punto B, x = 2, y = 4/3

El valor máximo es –1 y se alcanza en el punto C, x = 2, y = 2

6.- Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente.
La producción máxima mensual es de una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno. Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

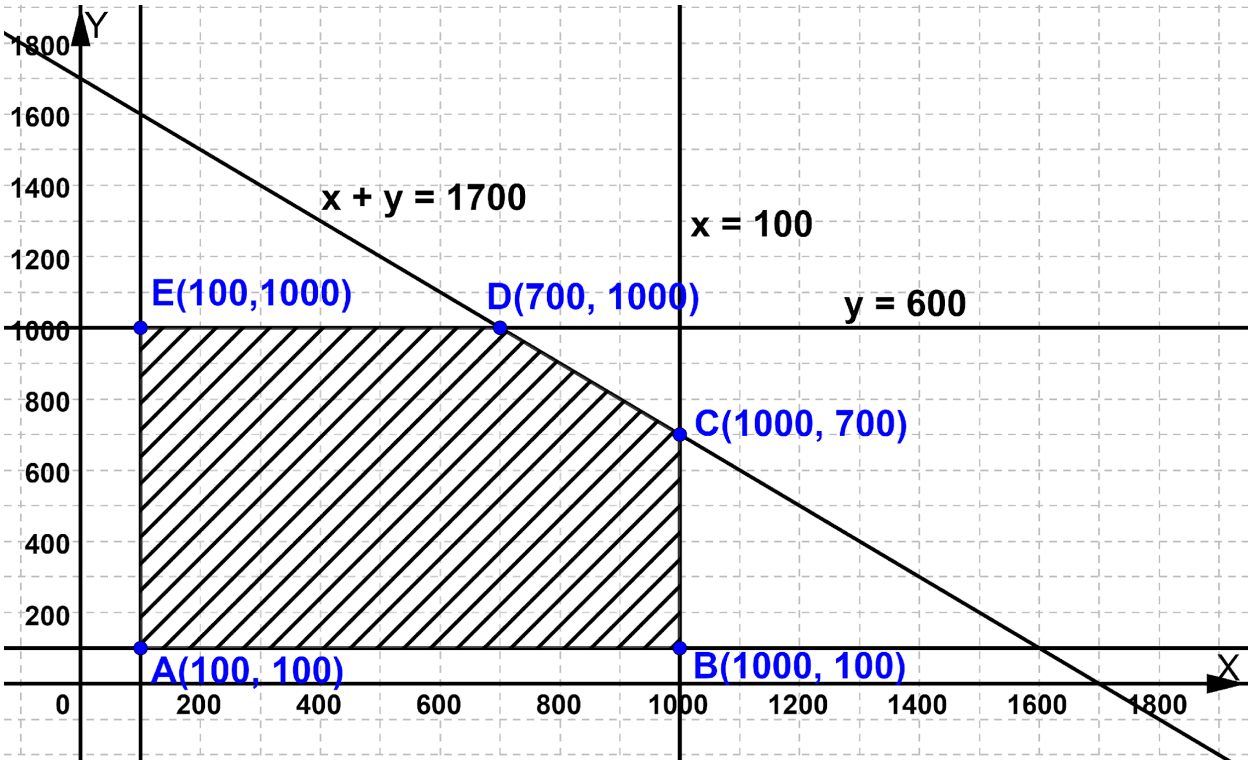
Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg/mes	ingresos mensuales (en €)
gambas	x	10x
langostinos	y	15y
total	x + y	10x + 15y

Las restricciones son: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $100 \leq x \leq 1000$, $100 \leq y \leq 1000$, $x + y \leq 1700$

La función a optimizar (maximizar) es la función ingresos mensuales: f(x, y) = 10x + 15y



Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 10x + 15y$:

$$f(A) = f(100, 100) = 10.100 + 15.100 = 2500$$

$$f(B) = f(1000, 100) = 10.1000 + 15.100 = 11500$$

$$f(C) = f(1000, 700) = 10.1000 + 15.700 = 20500$$

$$f(D) = f(700, 1000) = 10.700 + 15.1000 = 22000$$

$$f(E) = f(100, 1000) = 10.100 + 15.1000 = 16000$$

Los ingresos máximos son 22000 € y se alcanzan vendiendo 700 kg de gambas y 1000 kg de langostinos.