

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

_____ А.Б.Заблоцкий
«___» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 27 ноября 2021 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

Х класс

1. Окружность, центр которой лежит на ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$, расположенной в первой координатной четверти, проходит через начало координат O и второй раз пересекает координатные оси в точках A и B . Найти площадь треугольника AOB .

2. Числитель и знаменатель правильной дроби — двузначные числа, причем цифра единиц числителя совпадает с цифрой десятков знаменателя. Вася «сократил» дробь, зачеркнув эти одинаковые цифры. Удивительно, но полученная дробь оказалась равна исходной. Установите, какие дроби мог «сокращать» Вася.

3. Пусть $P(x)$ многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами. Известно, что $P(1) = 8$, $P(12) = 2021$. Найти $P(x)$.

4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC . Окружность, проходящая через точку B , касается стороны AC в точке M и пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Доказать, что $\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC^2}{AB^2}$, где $S(\triangle AKM)$ и $S(\triangle CLM)$ — площади треугольников AKM и CLM соответственно.

5. В турнире по футболу участвовали n команд. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. По окончании турнира оказалось, что у команды A число побед превышает число поражений, но при этом команда A заняла последнее место, набрав меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
X класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. **Решение:**

Пусть точка $P(a; \frac{1}{a})$ – центр окружности. Тогда уравнение

$$(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = R^2$$

этой окружности будет иметь вид:

Так как точка $O(0;0)$ лежит на окружности, то

$$(0-a)^2 + \left(0 - \frac{1}{a}\right)^2 = R^2 \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = R^2$$

, откуда

$$(x-a)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - \frac{2y}{a} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

Имеем:

$$x^2 - 2ax + y^2 - \frac{2y}{a} = 0$$

(1).

Пусть данная окружность пересекает оси OX и OY в точках A и B соответственно. Найдем из (1) координаты точки A : $y=0$, $x^2 - 2ax = 0$. Т.к. $x>0$, то $x=2a$, т.е. $A(2a; 0)$. Найдем координаты точки

B : $x=0$, $y^2 - \frac{2y}{a} = 0$. Т.к. $y>0$, то $y = \frac{2}{a}$, т.е. $B(0; \frac{2}{a})$.

Итак $OA=2a$, $OB=\frac{2}{a}$. $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2$ (кв.ед.)

Ответ: 2 кв. ед.

2. **Решение:**

Пусть $\frac{10a+b}{10b+c}$ — исходная дробь, где a, b, c — цифры. Тогда $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, или $10ab - 10ac = bc - ac$, или $5 \cdot 2a(b-c) = c(b-a)$. Так как $c(b-a)$ делится на простое число 5, то $c \vdots 5$ или $(b-a) \vdots 5$.

Если $c \vdots 5$, то $c = 5$ и $2a(b-5) = b-a$. Из четырех вариантов для b (6, 7, 8, 9) условию задачи соответствуют два: $b_1 = 6$, $a_1 = 2$ и $b_2 = 9$, $a_2 = 1$.

Если $(b-a) \vdots 5$, то $b = a + 5$ и $2a(b-c) = c$. Из четырех вариантов для a (1, 2, 3, 4) условию задачи соответствуют два: $a_1 = 1$, $b_1 = 6$, $c_1 = 4$ и $a_2 = 4$, $b_2 = 9$, $c_2 = 8$.

Таким образом, Вася мог «сокращать» одну из четырех дробей: $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{49}{98}$.

Ответ: $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{49}{98}$.

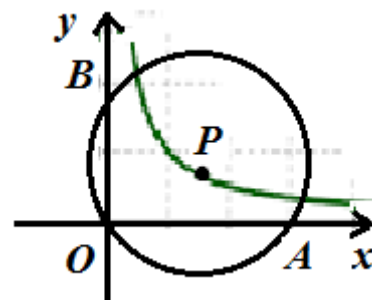
3. **Решение:**

Так как $P(1) = 8$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 8. Поскольку $2021 < 12^4$ и $2021 > 12^3 \cdot 8$, многочлен $P(x)$ имеет степень 3, т.е.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \geq 1, \quad b, c, d \geq 0, \quad a + b + c + d = 8.$$

Имеем: $2021 = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d$.

$2021 < 2 \cdot 12^3$, т.е. $a=1$.



$$2021 = 1728 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, \quad 293 = b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, \quad \text{где } b + c + d = 7.$$

Отсюда следует, что $b \leq 2$.

Пусть $b=1$, тогда $293 = 144 + c \cdot 12 + d$, $149 = c \cdot 12 + d$, где $c + d = 6$. Однако $149 > 12 \cdot 6$. Противоречие.

Пусть $b=2$, тогда $293 = 288 + c \cdot 12 + d$, $5 = c \cdot 12 + d$, где $c + d = 5$. Откуда $c=0$, $d=5$.

Итак, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.

Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.

4. Решение:

1 способ.

По свойству касательной и секущей имеем:

$AK \cdot AB = AM^2$, $CL \cdot CB = CM^2$. Поскольку $AM = CM$, то

$$\frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB} \quad (1).$$

Далее,

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{AK \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{2AB}, \quad S(\triangle AKM) = \frac{AK}{2AB} S(\triangle ABC) \quad (2).$$

$$\frac{S(\triangle CLM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot AC} = \frac{CL}{2BC}, \quad S(\triangle CLM) = \frac{CL}{2BC} S(\triangle ABC) \quad (3)$$

Из (2) и (3) с учетом (1) получаем:

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{AK}{CL} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

2 способ.

Как и в первом способе доказываем, что $\frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}$.

$$S(\triangle AKM) = \frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A, \quad S(\triangle CLM) = \frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C.$$

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A}{\frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C} = \frac{AK \cdot \sin A}{CL \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C}$$

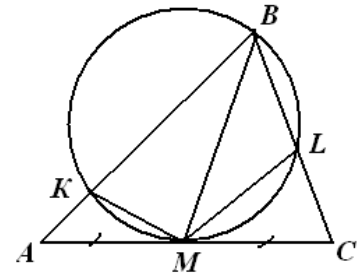
По теореме синусов для треугольника ABC имеем: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC}{AB}$.

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot BC}{AB \cdot AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Команда A провела $n-1$ игру. Если у нее побед больше, чем поражений, то минимальное число очков, которое она могла набрать – это $3 + (n-2) = n+1$ (это будет в случае, если команда A выиграла одну игру, а остальные свела вничью). Каждая из $n-1$ оставшихся команд должна набрать не меньше, чем $n+2$ очка. Поэтому сумма очков, набранных остальными командами должна быть не меньше, чем $(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$. В играх между собой $n-1$ команд могут набрать не более,



чем $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2}$ очков: они проведут между собой $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ игр, каждая из которых принесет в общую копилку максимум 3 очка в случае победы одной из команд. Кроме того, оставшиеся $n-1$ команд наберут в сумме $n-2$ очка за счет ничьих с командой A . Итак, сумма очков,

набранная остальными командами не превышает $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2$. Получаем неравенство:

$$\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2 \geq n^2 + n - 2.$$

Откуда $n \geq 9$.

Пусть $n=9$. Тогда команда A наберет не менее $3+7=10$ очков. Каждая из остальных команд должна набрать не менее 11 очков. Сумма очков остальных команд не меньше, чем 88. В играх между

собой остальные 8 команд наберут не более, чем $\frac{3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 84$ очка. Плюс еще 7 очков в играх с командой A . Итого, остальные команды могут в сумме набрать максимум $84+7=91$ очко, но при этом они должны набрать не менее 88 очков. Это означает, что им в играх между собой допускается играть вничью не более трех раз. Игры остальных команд между собой будем называть «турнир восьми». В

«турнире восьми» будет сыграно $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ матчей. Рассмотрим возможные количества ничьих на «турнире восьми».

1) На «турнире восьми» не было ничьих. Тогда всего было одержано 28 побед. $28 = 3 \cdot 8 + 4$ – это означает, что не менее четырех команд ($8-4=4$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. С учетом ничьей с командой A , каждая из этих команд в исходном турнире набрала не более 10 очков.

2) На «турнире восьми» была 1 ничья. Тогда всего было одержано 27 побед. $27 = 3 \cdot 8 + 3$ – это означает, что не менее пяти команд ($8-3=5$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Ничья прибавит по очку не более, чем двум из них. Тогда не менее, чем $5-2=3$ команды с учетом ничьей с командой A , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

3) На «турнире восьми» было 2 ничьи. Тогда всего было одержано 26 побед. $26 = 3 \cdot 8 + 2$ – это означает, что не менее шести команд ($8-2=6$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Две ничьи прибавят по очку не более, чем четырем из них. Тогда не менее, чем $6-4=2$ команды с учетом ничьей с командой A , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

4) На «турнире восьми» было 3 ничьи. Тогда всего было одержано 25 побед. $25 = 3 \cdot 8 + 1$ – это означает, что не менее семи команд ($8-1=7$) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Три ничьи прибавят по очку не более, чем шести из них. Тогда найдется команда, которая с учетом ничьей с командой A , наберет в исходном турнире не более 10 очков.

Получается, что 9 команд на турнире быть не может.

Пусть $n=10$. Тогда команда A наберет не менее $3+8=11$ очков. Покажем, что каждая из остальных команд может набрать более 11 очков. Расположим остальные 9 команд по кругу. Пусть каждая команда побеждает следующие 4 команды, находящиеся за ней по ходу часовой стрелки, и проигрывает четырем командам, следующим за ней против хода часовой стрелки. Тогда «турнире девяти» каждая команда 4 раза выиграет и 4 раза проиграет и наберет 12 очков. В исходном турнире, учитывая игры с командой A , восемь из оставшихся команд наберут по 13 очков, и одна (которая проиграла команде A) наберет 12 очков.

Ответ: 10 команд.