

Тема: Формули зведення. Періодичність, побудова графіків та властивості тригонометричних функцій

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Формули зведення

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$
 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$

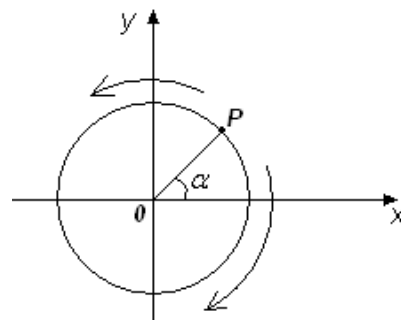
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$
 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha.$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$
 $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha.$

Періодичність, побудова графіків та властивості тригонометричних функцій

1. Означення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ та $x - T$ також належать області визначення і виконується умова: $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Коли точка P , яка задає кут α виконає повний оберт у додатному (від'ємному) напрямку, вона займе знову початкове положення на колі і визначатиме кут $\alpha + 360^\circ (\alpha - 360^\circ)$. Координати точки P при такому переміщенні не зміняться, а отже, і значення всіх тригонометричних функцій залишаться без змін.



Кількість повних обертів може бути будь-яким цілим числом, а тому і значення тригонометричних функцій кута α повторюватимуться через будь-яку кількість повних обертів в будь-якому напрямку.

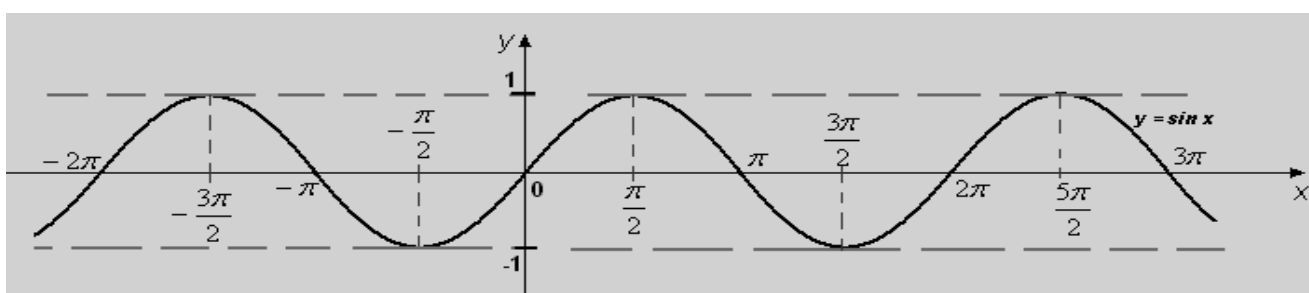
Таким чином, будь-яке число, кратне 360 є періодом всіх тригонометричних функцій, або математичною мовою, період всіх тригонометричних функцій-

$$T = 360n, n \in \mathbb{Z} \text{ (} n - \text{довільне ціле число) , або в радіанній мірі } T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} .$$

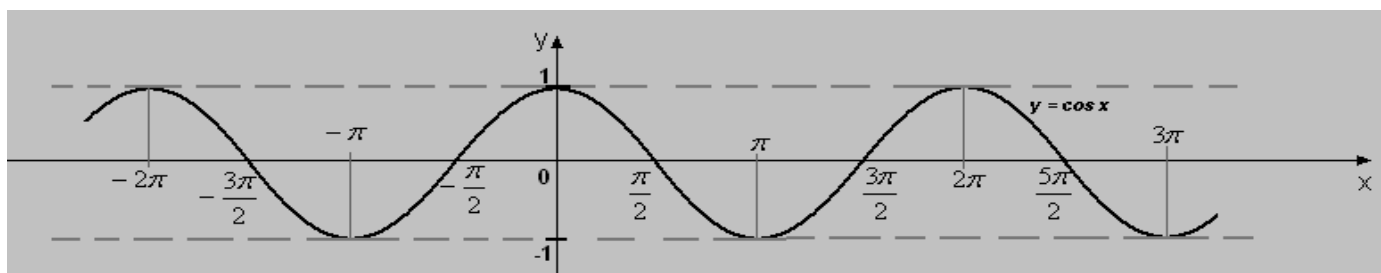
Найменшим додатним періодом функцій $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ є число 2π . Для функцій $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ найменший додатний період π .

2. Графіки тригонометричних функцій

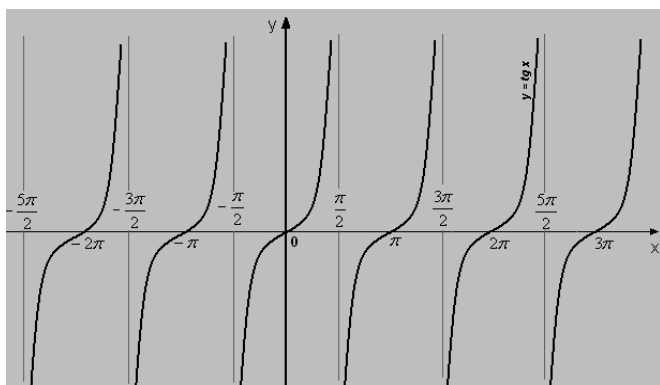
1. Графік функції $y = \sin x$



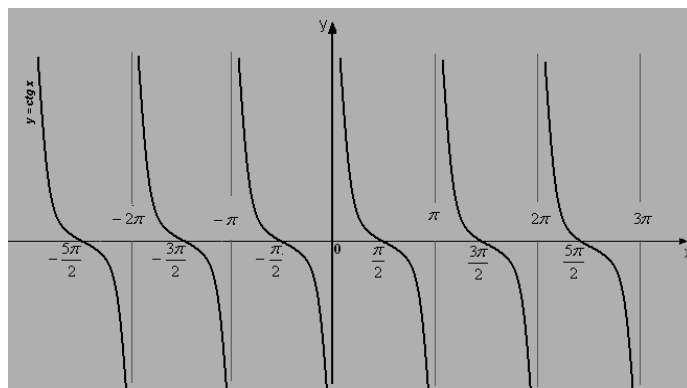
2. Графік функції $y = \cos x$



3. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$



4. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$



3. Властивості тригонометричних функцій (табл.)

№	Функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
	Влас- тивість				
1	Область визначення	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$ $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

				$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	
2	Множина значень	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$y \in (-\infty; \infty)$	$y \in (-\infty; \infty)$
3	Парність (непарність)	Непарна	Парна	Непарна	Парна
4	Періодичність	$T = 2\pi n, n \in Z$	$T = 2\pi n, n \in Z$	$T = \pi n, n \in Z$	$T = \pi n, n \in Z$
5	Нульові значення	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
6	Проміжки зростання	$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$	Не має
7	Проміжки спадання	$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$	Не має	$x \in [\pi n; \pi + \pi n]$
8	Додатні значення	$x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
9	Від'ємні значення	$x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
10	Найбільше значення	$y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$y = 1$ при $x = 2\pi n$	Не має	Не має
11	Найменше значення	$y = -1$ при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$	$y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$	Не має	Не має

- Приклад 1. Побудувати графік функції

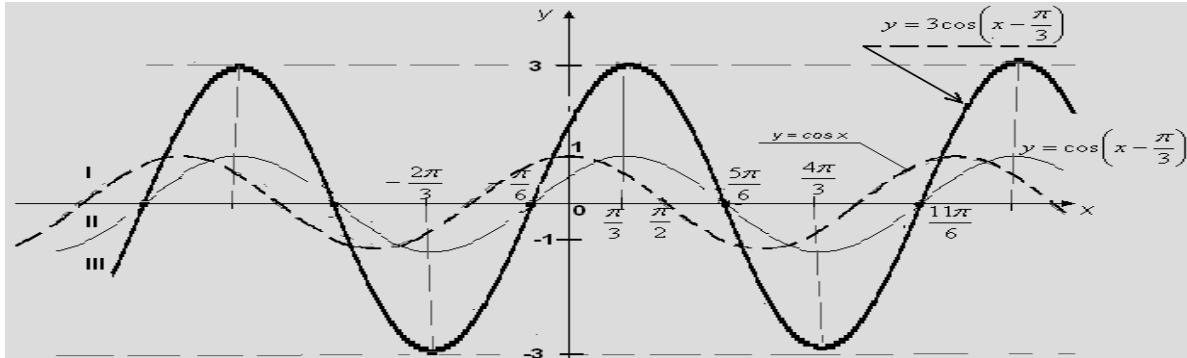
$$y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Розв'язання I. Побудуємо графік функції $y = \cos x$.

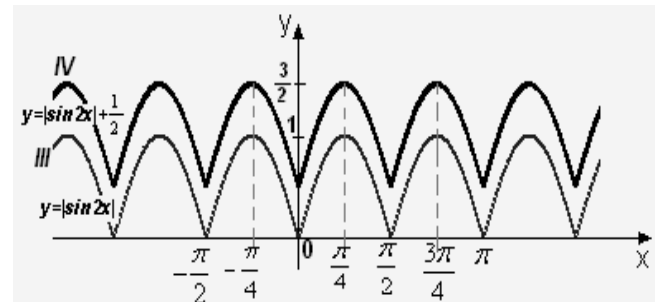
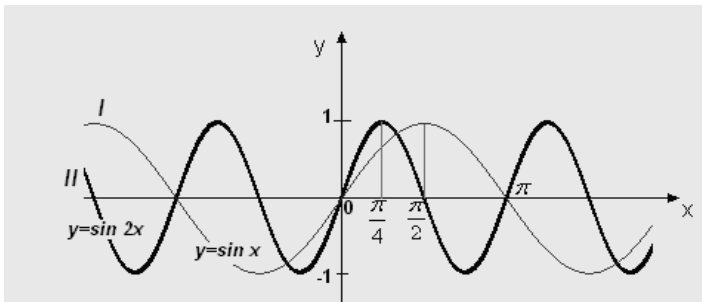
II. Графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ отримуємо перенесенням графіка функції $y = \cos x$ в

додатному напрямі вздовж осі Ox на відстань $\frac{\pi}{3}$.

III. Графік функції $y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ отримуємо розтягнуттям в 3 рази графіка функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ вздовж осі Oy



- **Приклад 2.** Побудувати графік функції $y = |\sin 2x| + \frac{1}{2}$



I. Побудуємо графік функції $y = \sin x$;

II. Стиснувши графік функції $y = \sin x$ вздовж осі Ox вдвічі отримаємо графік функції $y = \sin 2x$;

III. Щоб отримати графік функції $y = |\sin 2x|$, відображаємо ту частину графіка II, для якої $y > 0$

(нижче осі Ox) симетрично відносно осі Ox .

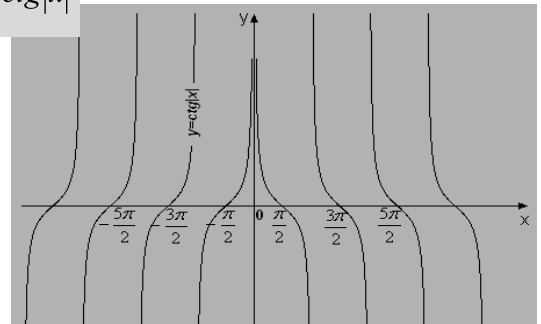
IV. Графік функції $y = |\sin 2x| + \frac{1}{2}$ отримаємо, перемістивши графік III, вгору вздовж осі Oy на $\frac{1}{2}$.

• **Приклад 3.** Побудувати графік функції

$$y = \operatorname{ctg}|x|$$

I. Так як $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}|x|$ при $x > 0$, то спочатку можна побудувати графік функції $y = \operatorname{ctg} x$, для $x > 0$.

II. Функція $y = \operatorname{ctg}|x|$ є парною, отже інша частина графіка (при $x < 0$) – симетрична побудованій відносно осі Oy .



Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 11, 14.
2. Законспектувати означення, формули.
3. Виконати письмово вправи: 11.1, 11.3, 11.5, 11.7, 11.9, 11.11, 14.1, 14.3, 14.5.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.slideshare.net/rudenkoos/ss-57823736>

<https://www.slideshare.net/irinakinash/ss-42006167>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .