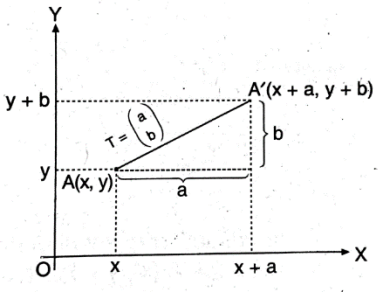
TRANSFORMASI GEOMETRI

BAB I TRANSFORMASI GEOMETRI

A. Translasi (Pergeseran)

Translasi atau pergeseran merupakan transformasi yang memindahkan titik dengan jarak dan arah tertentu. Pada transformasi translasi digunakan pendekatan koordinat. Pada bidang koordinat dapat diasumsikan bahwa pergerakan ke arah sumbu X positif adalah kanan, pergerakan ke arah sumbu X negatif adalah kiri, pergerakan ke arah sumbu Y positif adalah atas, dan pergerakan ke arah sumbu Y negatif adalah bawah.

Translasi dinyatakan $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan a menyatakan jarak dana rah perpindahan secara horizontal pada sumbu X dan b memnyatakan jarak dana rah perpindahan secara vertical pada sumbu Y. Untuk memahami konsep translasi, perhatikan gambar berikut:



Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh bayangan $A'(x', y')$ dengan $x' = x + a$ dan $y' = y + b$.

Translasi titik A dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A(x, y) \qquad T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \rightarrow A'(x', y')$$

Dengan menggunakan konsep matriks maka translasi titik A disusun sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

Contoh 1:

Titik $A(2,\ 3)$ ditranslasikan dengan matriks translasi $T(-\ 3, 4)$. Tentukan bayangan A!
Jawab:

$$A(2,3) \qquad T = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (2\ 3\ ) + (-\ 3\ 4\ ) = (2\ +\ (-\ 3)\ 3\ +\ 4\ ) = (-\ 1\ 7\ )$$

Bayangan A adalah $A'(-\ 1, 7)$

Translasi terhadap Kurva

Translasi terhadap suatu kurva pada bidang koordinat. Kurva yang dimaksud dapat berbentuk garis, lingkaran, elips, maupun hiperbola. Translasi terhadap suatu kurva tertutup (bangun datar) hanya mengubah posisinya. Bentuk bangun datar bayangannya tidak berubah, begitupun luas bangun datarnya juga tidak berubah.

Langkah-langkah untuk menentukan bayangan kurva oleh translasi sebagai berikut :

a. Persamaan kurva yang akan ditranslasi dalam bentuk variabel x dan y. Diambil dan dianggap titik (x, y) terletak pada kurva.
b. Tentukan bayangan titik (x, y) oleh translasi. Anda akan memperoleh hubungan $x,\ x',\ y,\ \&\ y'$. Nyatakan x dan y sebagai persamaan dalam x' dan y'.
c. Substitusikan persamaan x dan persamaan y yang diperoleh pada langkah b ke persamaan kurva. Dengan demikian akan diperoleh persamaan kurva dalam bentuk x' dan y'. Gantilah x' dengan x dan y' dengan y sehingga kurva yang diperoleh sekarang salam bentuk x dan y. Kurva inilah yang disebut bayangan kurva hasil translasi.

Contoh 2:

Tentukan bayangan garis $y = 2x - 3$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Misalkan titik (x, y) terletak pada garis $y = 2x - 3$.

Bayangan titik (x, y) oleh translasi $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$A(x, y) \qquad T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x\ y) + (2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x + 2\ y + 3)$$

$$x' = x + 2 \Leftrightarrow x = x' - 2$$

$$y' = y + 3 \Leftrightarrow y = y' - 3$$

Substitusikan x dan y ke dalam persamaan $y = 2x - 3$

$$y' - 3 = 2(x' - 2) - 3$$

$$y' = 2x' - 4$$

Jadi, bayangannya adalah $y = 2x - 4$

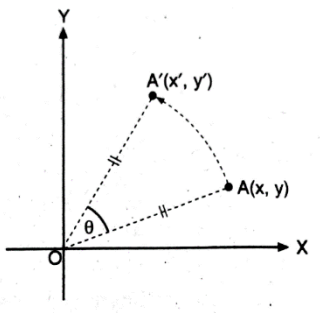
B. Rotasi (Perputaran)

Rotasi adalah perputaran benda pada poros yang tetap. Rotasi termasuk transformasi geometri. Pada transformasi rotasi digunakan pendekatan koordinat. Rotasi dapat diartikan sebagai transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik tersebut sejauh θ dengan pusat titik tertentu. Jika θ positif, arah putaran berlawanan dengan arah putaran jarum jam. Jika θ negatif arah putaran searah dengan arah

putaran jarum jam. Suatu rotasi dengan pusat titik P dan besar sudut rotasi θ ditulis $R[P, \theta]$.

a. Rotasi terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$

Rotasi sejauh θ berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhahdap titik pusat $O(0, 0)$ dinotasikan $R[O, \theta]$. Untuk memahami konsep rotasi, perhattikan gambar disamping.



Titik $A(x, y)$ dirotasikan oleh $R[O, \theta]$ sehingga diperoleh bayangan $A'(x', y')$. Rotasi titik A dapat dituliskan sebagai berikut.

$A(x, y) \quad R[O, \theta] \quad \rightarrow A'(x', y')$

Dengan $x' = x \cos cos\ \theta - y \sin sin\ \theta$

$y' = x \sin sin\ \theta + y \sin sin\ \theta$

Dengan konsep matriks, rotasi titik A disusun seperti berikut.

$$(x'\ y') = (\cos cos\ \theta \quad - \sin sin\ \theta \quad \sin sin\ \theta \quad \cos cos\ \theta\ )(x\ y\ )$$

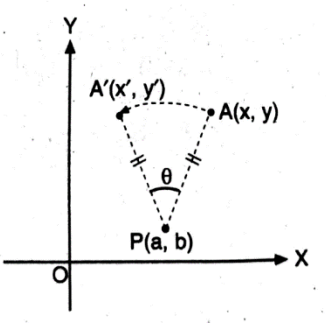
Contoh 3:

Jika titik $A(-\ 2, 3)$ dirotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut 90° berlawanan arah jarum jam maka tentukanlah bayangan titik tersebut!
Jawab:
$A(-\ 2, 3) \quad R[O, \theta] \quad \rightarrow A'(x', y')$

$(x'\ y') = (\cos cos\ 90° \quad - \sin sin\ 90° \quad \sin sin\ 90° \quad \cos cos\ 90°\ )(-\ 2\ 3\ )$
$(x'\ y') = (0 \quad -\ 1\ 1\ 0\ )(-\ 2\ 3\ )$
$(x'\ y') = (-\ 3 \quad -\ 2\ )$
Jadi, Bayangan titik A adalah $A'(-\ 3, -\ 2)$

b. Rotasi terhadap Titik Pusat $P(a, b)$

Rotasi sejauh θ berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhahdap titik pusat $P(a, b)$ dinotasikan $R[P, \theta]$. Untuk memahami konsep rotasi, perhatikan gambar disamping.



Titik $A(x, y)$ dirotasikan oleh $R[P, \theta]$ sehingga diperoleh bayangan $A'\left(x', y'\right)$. Rotasi titik A dapat dituliskan sebagai berikut.

Rotasi titik A dapat dituliskan sebagai berikut.

$A(x, y) \quad R[P, \theta] \quad \rightarrow A'(x', y')$

Dengan $x' = (x - a) \cos cos\, \theta - (y - b) \sin sin\, \theta$

$y' = (x - a) \sin sin\, \theta + (y - b) \sin sin\, \theta$

Dengan konsep matriks, rotasi titik A disusun seperti berikut.

$$(x' - a \;\; y' - b) = (\cos cos\, \theta \;\; - \sin sin\, \theta \;\; \sin sin\, \theta \;\; \cos cos\, \theta)(x - a \;\; y - b)$$

atau

$$(x' \; y') = (\cos cos\, \theta \;\; - \sin sin\, \theta \;\; \sin sin\, \theta \;\; \cos cos\, \theta)(x - a \;\; y - b) + (a \; b)$$

Contoh 4:

Tentukan bayangan titik $A(-6, 4)$ oleh rotasi $R(P(3, -1), -90°)$!

Jawab:

$A(-6, 4) \quad R[(3, -1), -90°] \quad \rightarrow A'(x', y')$

$(x'\ y') = (\cos cos\ (-\ 90°)\ \ -\ \sin sin\ (-\ 90°)\ \ \sin sin\ (-\ 90°)\ \ \cos cos\ (-\ 90°)\ )(-\ 6\ -$

$(x'\ y') = (0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ )(-\ 9\ 5\ ) + (3\ \ -\ 1\ )$

$(x'\ y') = (5\ 9\ ) + (3\ \ -\ 1\ )$

$(x'\ y') = (8\ 8\ )$

Jadi, bayangan titik $A(-\ 6, 4)$ oleh rotasi $R(P(3, -\ 1), -\ 90°)$ adalah $A'(8, 8)$.

Rotasi terhadap Kurva

Rotasi yang diterapkan terhadap kurva pada bidang koordinat. Kurva yang dimaksud dapat berbentuk garis, parabola, maupun lingkaran. Langkah-langkah untuk menentukan persamaan bayangan kurva oleh rotasi sebagai berikut:

a. Persamaan kurva yang akan dirotasi dalam bentuk variable x dan y. Misalkan titik (x, y) terletak pada kurva.
b. Tentukan bayangan titik (x, y) oleh rotasi sehingga diperoleh hubungan $x, x', y\ dan\ y'$. Nyatakan x dan y sebagai persamaan dalam x' dan y'.
c. Subtitusikan persamaan x dan persamaan y yang diperoleh pada langkah b ke dalam persamaan kurva. Dengan demikian akan diperoleh persamaan kurva dalam bentuk x' dan y'. Gantilah x' dengan x dan y' dengan y sehingga kurva yang diperoleh sekarang dalam bentuk x dan y. Kurva inilah yang disebut bayangan kurva hasil rotasi.

Contoh 5:

Jika garis $x - 2y + 3 = 0$ dirotasi dengan pusat $P(1, -\ 1)$ dan sudut $180°$ searah jarum jam maka tentukanlah bayangan garis tersebut!
Jawab:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $x - 2y + 3 = 0$ sehingga,

$A(x, y) \quad R[P(1, -1), -180°] \quad \rightarrow A'(x', y')$

$(x'\ y') = (\cos cos\ (-180°) \quad -\sin sin\ (-180°) \quad \sin sin\ (-180°) \quad \cos cos\ (-180°)\ )(x$

$(x'\ y') = (-1\ 0\ 0\ -1\ )(x - 1\ y + 1\ ) + (1\ -1\ )$

$(x'\ y') = (-x + 1\ -\ y - 1\ ) + (1\ -1\ )$

$(x'\ y') = (-x + 2\ -\ y - 2\ )$

$x' = -x + 2 \iff x = 2 - x'$

$y' = -y - 2 \iff y = -y' - 2$

Substiitusikan x daan y ke dalam persamaan $x - 2y + 3 = 0$,

$(2 - x') - 2(-y' - 2) + 3 = 0$

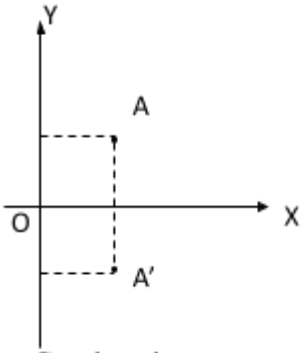
$x' - 2y' + 9 = 0$

Jadi, bayangannya adalah $x - 2y + 9 = 0$

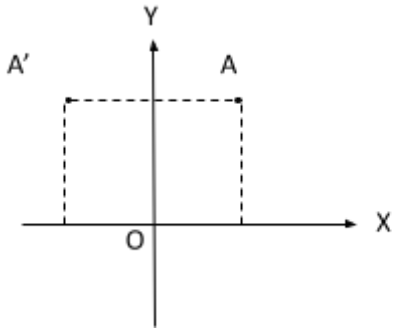
C. Refleksi

Refleksi atau pencerminan adalah transformasi yang memindahkan titik menurut sital-sifat cermin. Pencerminan biasanya dilakukan terhadap garis tertentu yang bertindak sebagai cermin atau sumbu refleksi.

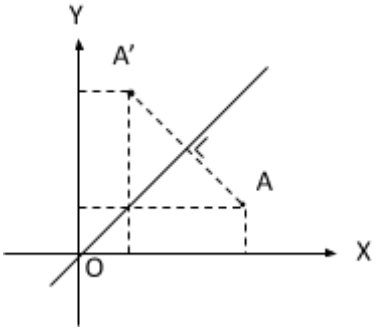
Gambar berikut menunjukkan titik $A(x, y)$ yang direfleksikan terhadap suatu garis. Bayangannya yaitu $A'(x', y')$. Pada suatu refleksi, segmen garis yang menghubungkan titik mula-mula (A) dengan hasil refleksi (titik A') akan terbagi dua sama panjang dan tegak lurus terhadap sumbu refleksinya.



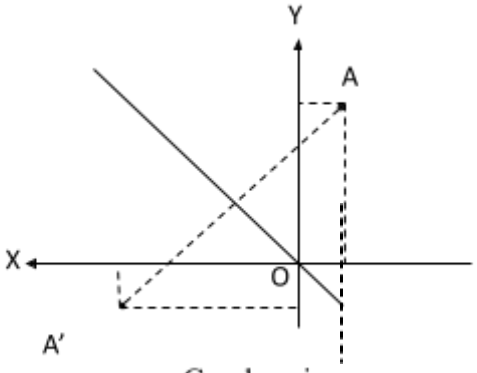
Gambar i



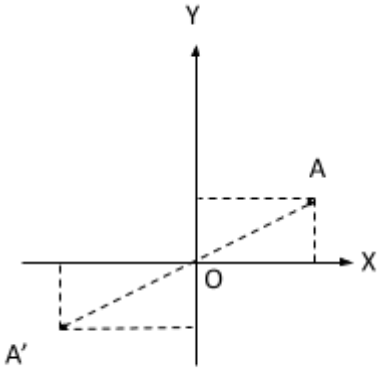
Gambar ii



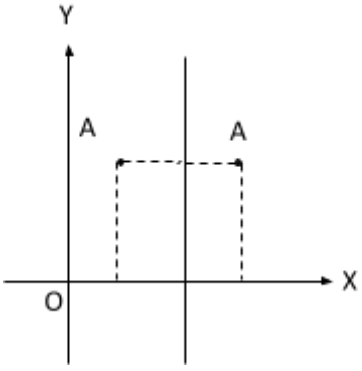
Gambar iii



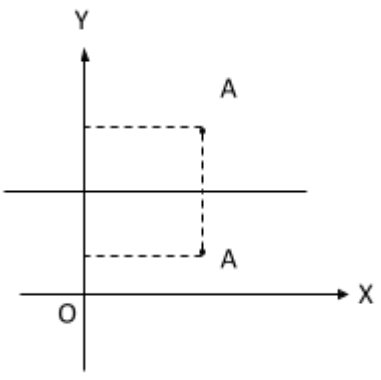
Gambar iv

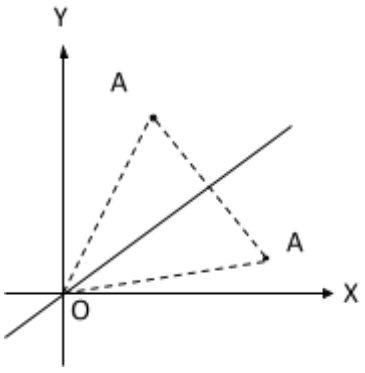


Gambar v

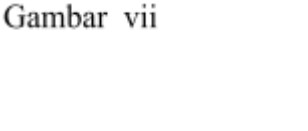


Gambar vi

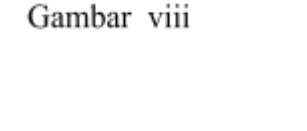




Gambar vii



Gambar viii



No.	Sumbu Refleksi	Pemetaan	Persamaan Matriks
i	Sumbu X	$A(x,y) \quad M_x \quad \rightarrow A'(x,-y)$	$(x'\ y') = (1\ 0\ 0\ -1)(x\ y)$
ii	Sumbu Y	$A(x,y) \quad M_y \quad \rightarrow A'(-x,y)$	$(x'\ y') = (-1\ 0\ 0\ 1)(x\ y)$
iii	Garis $y = x$	$A(x,y) \quad M_{y=x} \quad \rightarrow A'(y,x)$	$(x'\ y') = (0\ 1\ 1\ 0)(x\ y)$
iv	Garis $y = -x$	$A(x,y) \quad M_{y=-x} \quad \rightarrow A'(-y$	$(x'\ y') = (0\ -1\ -1\ 0)(x\ y)$
v	Titik O(0,0)	$A(x,y) \quad M_0 \quad \rightarrow A'(-x,-$	$(x'\ y') = (-1\ 0\ 0\ -1)(x\ y)$
vi	Garis $x = a$	$A(x,y) \quad M_{x=a} \quad \rightarrow A'(2a -$	$(x'\ y') = \left(\frac{2a}{x}\ -1\ 0\ 0\ 1\right)(x\ y)$
vii	Garis $y = b$	$A(x,y) \quad M_{y=b} \quad \rightarrow A'(x,2b$	$(x'\ y') = \left(1\ 0\ 0\ \frac{2b}{y}\ -1\right)(x\ y)$
viii	Garis $y = x\tan tan$	$A(x,y) \quad M_{y=x\tan tan \propto} \quad \rightarrow$ dengan : $x' = x\ cos\ 2\propto + y\ sin\ 2\propto$ $y' = x\ sin\ 2\propto - y\ cos\ 2\propto$	$(x'\ y') = (\cos cos\ 2\propto \ \ \sin sin\ 2\propto$

Contoh 6:

Tentukan bayangan $A(5,-2)$ jika dicerminkan terhadap garis $= 3$!

Jawab

Bayangan (x,y) terhadap $x = 3$ adalah $(2(3) - x, y)$.

$$x' = 2(3) - 5$$

$$= 1$$

$$y' = -2$$

Sehingga bayangan titik A oleh pencerminan terhadap garis $x = 3$ adalah A $'(1, -2)$.

Refleksi Terhadap Kurva

Refleksi terhadap suatu kurva pada bidang koordinat. Kurva yang dimaksud dapat berbentuk garis, lingkaran, elips, maupun hiperbola. Refleksi terhadap suatu kurva tertutup (bangun datar) hanya mengubah posisinya. Bentuk bangun datar bayangannya tidak berubah, begitupun luas bangun datarnya juga tidak berubah.

Langkah-langkah untuk menentukan bayangan kurva oleh refleksi sebagai berikut :

1. Persamaan kurva yang akan direfleksi dalam bentuk variabel x dan y. Diambil dan dianggap titik (x, y) terletak pada kurva.

2. Tentukan bayangan titik (x, y) oleh refleksi. Anda akan memperoleh hubungan $x,\ x',\ y,\ \&\ y'$. Nyatakan x dan y sebagai persamaan dalam x' dan y'.

3. Substitusikan persamaan x dan persamaan y yang diperoleh pada langkah b ke persamaan kurva. Dengan demikian akan diperoleh persamaan kurva dalam bentuk x' dan y'. Gantilah x' dengan x dan y' dengan y sehingga kurva yang diperoleh sekarang salam bentuk x dan y. Kurva inilah yang disebut bayangan kurva hasil refleksi.

Contoh 7:

Elips dengan persamaan $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$ dicerminkan terhadap sumbu Y. Tentukan persamaan bayangan elips tersebut.

Jawaban :

Misalkan titik (x, y) terletak pada elips $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$.

Bayangan titik (x, y) oleh pencerminan terhadap sumbu Y sebagai berikut :

$$(x, y) \quad M_y \quad \rightarrow \left(x', y'\right) = (-x, y)$$

Diperoleh $x' = -x \leftrightarrow x = -x'$ dan $y' = y \leftrightarrow y = y'$

Kemudian substitusikan $x = -x'$ dan $y = y'$ ke persamaan $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left((-x')-2\right)^2}{4} + \frac{\left(y'+1\right)^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(-\left(x'+2\right)\right)^2}{4} + \frac{\left(y'+1\right)^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'+2)^2}{4} + \frac{(y'+1)^2}{8} = 1$$

Jadi persamaan bayangan elips tersebut adalah $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$.

D. Dilatasi

Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun geomatri, tetapi tidak mengubah bentuk bangun gometri tersebut. Dilatasi ditentukan oleh pusat dilatasi dan faktor skala (faktor dilatasi). Dilatasi yang berpusat di titik asal O(0,0) dengan faktor skala k dinotasikan dengan $[O(0, 0), k]$. dilatasi yang berpusat di titik P(a, b) dan faktor skala k dinotasikan dengan $[P(a, b), k]$.

a. Dilatasi dengan Titik Pusat O(0,0)

Jika titik A(x, y) didilatasikan dengan pusat O(0,0) dan fator skala k serta diperoleh bayangan A'(x', y') secara pemetaan dapat ditulis :

$A(x, y)$ $[O(0, 0), k] \rightarrow A'(x', y')$ dengan $x' = kx$ dan $y' = ky$

b. Dilatasi dengan Titik Pusat P(a, b)

Jika titik A(x, y) didilatasikan dengan pusat P(a, b) dan faktor skala k serta diperoleh bayangan A'(x', y') secara pemetaan dapat ditulis :

$A(x, y)$ $[P(a, b), k] \rightarrow A'(x', y')$ dengan $x' = kx - ka + a$ dan $y' = ky - kb + b$

c. Luas Bangun Hasil Dilatasi

Jika suatu bangun yang mempunyai luas L didilatasikan dengan faktor skala k, luas bangun hasil dilatasi :

$$L' = k^2 \cdot L$$

Transformasi	Pemetaan	Persamaan Matriks
dilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala k	$A(x, y)\ [O, k] \rightarrow A'(kx, ky)$	$(x'\ y') = (k\ 0\ 0\ k)(x\ y)$
dilatasi dengan titik pusat B(a,b) dan faktor skala k	$A(x, y)\ [B, k] \rightarrow A'(x', y')$ dengan $x' = kx - ka + a$ $y' = ky - kb + b$	$(x'\ y') = (k\ 0\ 0\ k)(x - a\ y$

Contoh 8:

Tentukan bayangan titik A$(-6, 4)$ oleh pusat dilatasi P$(3, -1)$ dan k $= \frac{3}{2}$

Jawab

$x' = kx - ka + a$

$= \frac{3}{2} \bullet (-6) - \frac{3}{2} \cdot 3 + 3$

$= -6 - \frac{9}{2}$

$= -10\frac{1}{2}$

$y' = ky - kb + b$

$= \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \bullet (-1) - 1$

$= 5 + \frac{3}{2}$

$= 6\frac{1}{2}$

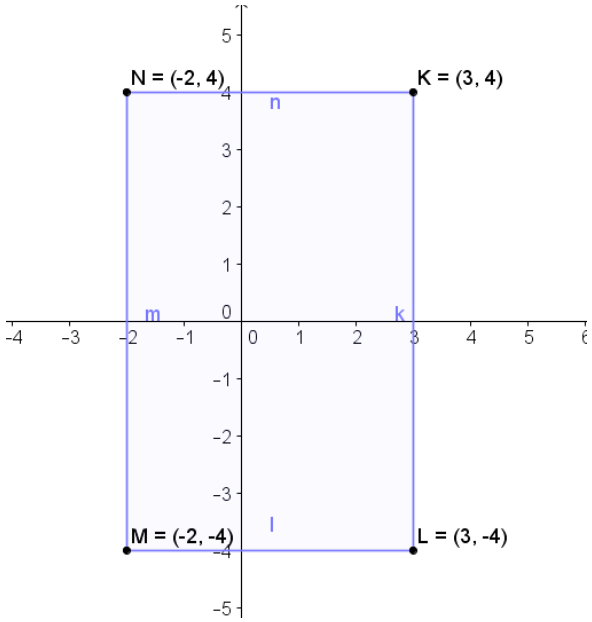
Jadi , $A'\left(-\ 10\frac{1}{2}\ ,\ 6\frac{1}{2}\right)$.

Contoh 9:

Persegi panjang KLMN dengan $K(3,4)$, $L(3,-4)$ dan $M(-2,-4)$ didilatasii dengan pusat O(0,0) dengan faktor skala 3. Luas persegi panjang setelah didilatasi adalah.....satuan luas.

Jawab :

Pertama visualisasikan terlebih dahulu dalam grafik.



Hitung luas dari persegi panjang KLMN yaitu, $L\ =\ 8{\times}5\ =\ 40$ satuan luas.
Tentukan bayangan dari masing-masing titik.

$K(3,4)\ [O,3]{\rightarrow}K^{'}(3(3),3(4))\ \Leftrightarrow K^{'}(9,12)$

$L(3,-\ 4)\ [O,3]{\rightarrow}K^{'}(3(3),3(-\ 4))\ \Leftrightarrow K^{'}(9,-\ 12)$

$M(-\ 2,-\ 4)\ [O,3]{\rightarrow}K^{'}(3(-\ 2),3(-\ 4))\ \Leftrightarrow K^{'}(-\ 6,-\ 12)$

$L'\ = k^{2}{\cdot}L$

$=\ 3^{2}{\cdot}\ 40$

$=\ 360$ satuan luas

Dilatasi Terhadap Kurva

Langkah-langkah untuk menentukan persamaan banyangan kurva oleh dilatasi :

a. Persamaan kurva yang akan didilatasi dalam bentuk x dan y. Anggaplah titik (x, y) terletak pada kurva.
b. Tentukan bayangan titik (x, y) oleh dilatasi. Akan diperoleh hubungan $x, x', y,$ dan y'. Nyatakan x dan y sebagai persamaan x' dan y'.
c. Substitusikan x dan y yang diperoleh pada langkah b ke persamaan yang diperoleh pada langkah a. Dengan demikian akan diperoleh persamaan kurva dalam bentuk x' dan y'. Gantilah x' dengan x dan y' dengan y. Kurva inilah yang disebut bayangan kurva dilatasi.

Contoh 10:

Diketahui lingkaran dengan persamaan $(x + 7)^2 + (y + 5)^2 = 5$. Tentukan persamaan bayangan lingkaran oleh dilatasi yang berpusat di titik O(0,0) dan faktor skala 4.

Jawab :

Ambil titik (x, y) yang terletak pada lingkaran $(x + 7)^2 + (y + 5)^2 = 5$. Bayangan (x, y) oleh dilatasi berpusat di titik O (0,0) dan faktor skala 4 sebagai berikut,

$$x' = 4x \Leftrightarrow x = \frac{x'}{4}$$

$$y' = 4y \Leftrightarrow y = \frac{y'}{4}$$

Substitusikan $x = \frac{x'}{4}$ dan $y = \frac{y'}{4}$ ke persamaan $(x + 7)^2 + (y + 5)^2 = 5$.

$$(x + 7)^2 + (y + 5)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x'}{4} + 7\right)^2 + \left(\frac{y'}{4} + 5\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x'+28}{4}\right)^2 + \left(\frac{y'+20}{4}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x'+28)^2}{16} + \frac{(y'+20)^2}{16} = 5$$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^{'} + 28\right)^2 + \left(y^{'} + 20\right)^2 = 80$

$\Leftrightarrow \quad (x + 28)^2 + (y + 20)^2 = 80$

Jadi persamaan bayangannya adalah $(x + 28)^2 + (y + 20)^2 = 80$.

Transformasi Oleh Suatu Matriks

a. Titik $A(x, y)$ ditransformasikan oleh matriks $(a\ b\ c\ d\ )$ menghasilkan titik $A'(x^{'}, y^{'})$. Transformasi titik A dapat dituliskan sebagai berikut:

$A(x, y) \quad (a\ b\ c\ d\ ) \quad \rightarrow A'(x', y')$

Dengan $x^{'} = ax + by$

$y^{'} = cx + dy$

Dengan konsep matriks, dilatasi titik A disusun seperti berikut.

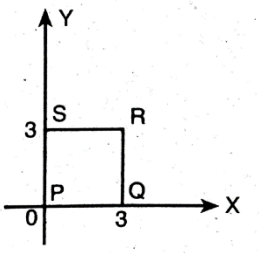
$(x'\ y'\ ) = (a\ b\ c\ d\ )(x\ y\ )$

b. Suatu bangun yang mempunyai luas L ditransformasikan oleh matriks $A = (a\ b\ c\ d\ )$ maka luas bangun hasil transformasi yaitu $L^{'} = |\det det\ A\ | \times L$

Contoh 11:

Diketahui persegi PQRS dengan koordinat titik $P(0, 0)$, $Q(3, 0)$, $R(3, 3)$, $S(0, 3)$. Tentukan luas bayangan persegi PQRS jika didilatasi $[O, 2]$.

Jawab:



luas PQRS= $3\times3 = 9$ satuan luas

$A = (2\ 0\ 0\ 2)$ adalah matriks dilatasi dengan $k = 2$

luas $P'Q'R'S' = |\det det\ A\ |\times L\ PQRS = |2\ 0\ 0\ 2\ |\times9 = 4\times9 = 36$ satuan luas

jadi, luas bayangan persegi PQRS adalah 36 satuan luas

BAB II KOMPOSISI TRANSFORMASI GEOMETRI

1. Komposisi Geometri

Komposisi geometri adalah suatu transformasi dilanjutkan transformasi lain. Dengan kata lain, komposisi geometri dapat diartikan sebagai transformasi yang melibatkan dua atau lebih transformasi yang dilakukan secara berurutan.

Diketahui T_1 merupakan transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A'(x', y')$ dan T_2 merupakan transformasi yang memetakan titik $A'(x', y')$ ke titik $A''(x'', y'')$. Transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A''(x'', y'')$ dapat ditulis sebagai:



Bentuk $T_2 \circ T_1$ disebut komposisi transformasi dan dibaca " T_2 komposisi T_1" atau "transformasi T_1 dilanjut dengan transformasi T_2". Transformasi T_1 dikerjakan terlbih dahulu, lalu dilanjutkan dengan transformasi T_2.

Bagan pengerjaan komposisi transformasi tersebut sebaai berikut:



2. Komposisi Transformasi Geometri dalam Bentuk Matriks

Misalkan T_1 adalah transformasi pertama yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $T_1 = (a\ b\ c\ d)$.

Misalkan pulag T_2 adalah transformasi kedua yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $T_2 = (e\ f\ g\ h)$.

Komposisi transformasi $T_1 \circ T_2$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $T_2 \circ T_1 = (e\ f\ g\ h)(a\ b\ c\ d)$. Dengan demikian, misalkan titik A ditransformasikan oleh $T_1 = (a\ b\ c\ d)$ dan dilanjutkan dengan transformasi $T_2 = (e\ f\ g\ h)$ maka titik $A'' = (e\ f\ g\ h)(a\ b\ c\ d)$A.

Contoh 12:

Tentukan bayangan titik $A(2, 1)$ oleh pencerminan terhadap sumbu Y dilanjutkan dengan dilatasi dengan titik pusat (0,0) dan faktor skala 2.

Jawab :

a. dengan pengerjaan transformasi berurut diperolah :

$$A(x, y) \quad M_y \quad \rightarrow A'(-x, y) \Leftrightarrow A(2, 1) \quad M_y \quad \rightarrow A'(-2, 1)$$

$$A'(x', y')\ [O(0, 0), k] \rightarrow A''\left(kx', ky'\right) \Leftrightarrow A'(-2, 1)\ [O(0, 0), k] \rightarrow A''(2(-2), 2(1))$$

$$\Leftrightarrow A'(-2, 1)\ [O(0, 0), k] \rightarrow A''(-4, 2)$$

b. jika dikerjakan dengan perkalian matriks, dilakukan langkah-langkah berikut. Matriks transformasi $T_1 = (-1\ 0\ 0\ 1)$ dan $T_2 = (2\ 0\ 0\ 2)$

$A'' = (e\ f\ g\ h)(a\ b\ c\ d)$A.

$A'' = (2\ 0\ 0\ 2)(-1\ 0\ 0\ 1)(2\ 1)$

$= (-2\ 0\ 0\ 2)(2\ 1)$

$= (-4\ 2)$

Jadi bayangan titik A adalah $A'' = (-4, 2)$

1. Komposisi Translasi

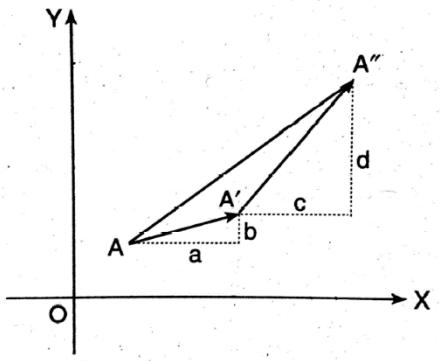
Komposisi translasi dapat diwakili atau diringkas menjadi satu satu translasi tunggal. Bilangan-bilangan yang menyatakan translasi

tunggal dihasilkan oleh bilangan-bilangan pada translasi-translasi semula.

Misalkan T_1 transformasi translasi pertama dinyatakan $T_1 = (a\ b)$ dan T_2 transformasi translasi kedua dinyatakan $T_2 = (c\ d)$. Komposisi translasi oleh T_1 dilanjutkan T_2 dapat diringkas menjadi:

$$T = T_2 \circ T_1 = T_1 + T_2 = (a\ b) + (c\ d) = (a + c\ b + d)$$

Untuk memahami konsep translasi, perhatikan gambar berikut:



Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T_1 = (a\ b)$, dilanjutkan ditranslasikan oleh $T_2 = (c\ d)$ sehingga diperoleh bayangan titik $A"(x", y")$.

Dengan menggunakan konsep matriks maka translasi titik *A* disusun seperti berikut:

$$(x"\ y") = ((x\ y) + (a\ b)) + (c\ d)$$

$$(x"\ y") = (x + a\ y + b) + (c\ d)$$

$$(x"\ y") = (x + a + c\ y + b + d)$$

Contoh soal:

Diketahui $T_1 = (4\ 2)$ dan $T_2 = (-1\ -5)$. Tentukan bayangan titik $P(-3, 7)$ oleh translasi T_1 dilanjutkan pleh translasi T_2 !

Jawab:

$$T = T_2 \circ T_1 = T_1 + T_2 = (4\ 2) + (-1\ -5) = (4 + (-1)\ 2 + (-5)) = (3\ -3)$$

Bayangan titik $P(-3, 7)$:

$(x''\ y'') = (-3\ 7) + (3\ -3) = (0\ 4)$

Jadi, Bayangan titik $P(-3, 7)$ oleh komposisi translasi tersebut adalah $P''(0, 4)$.

<u>Contoh soal komposisi translasi dilanjutkan transformasi lain:</u>

Tentukan bayangan titik $A(4, 3)$ Jika ditranslasikan oleh $(3\ 1)$, lalu dicerminkan terhadap sumbu X.

Jawab:

$A(4, 3) \quad T = (3\ 1) \quad \rightarrow A'(x', y') \qquad R \quad \rightarrow A''(x'', y'')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 3+1 \end{pmatrix} = (7\ 4)$$

$$(x''\ y'') = (1\ 0\ 0\ -1)(7\ 4) = (7\ -4)$$

Jadi, bayangan titik $A(4, 3)$ adalah $A''(7, -4)$

2. Komposisi Rotasi

Komposisi dua rotasi yang berpusat sama akan ekuivalen dengan rotasi dengan pusat sama sebesar penjumlahan kedua sudut rotasinya.

a. Komposisi Dua Rotasi Berurutan terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$

Bayangan titik $A(x, y)$ oleh rotasi $R[O, \alpha]$ dilanjutkan dengan rotasi $R[O, \beta]$ adalah $A''(x'', y'')$ dengan:

$$(x'' \; y'') = (\cos cos\,(\alpha + \beta) \;\; - \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \cos cos\,(\alpha + \beta)\;)(x \; y)$$

Contoh soal:

Diketahui $R_1[O, 30°]$ dan $R_2[O, 150°]$, tentukan bayangan titik $A(3,4)$ jika $R_2 \circ R_1$!

Jawab:

Karena kedua rotasi pada pusat yang sama, maka ekuivalen dengan rotasi dengan pusat sama sebesar penjumlahan kedua sudut rotasinya.

$$(x'' \; y'') = (\cos cos\,(30° + 150°) \;\; - \sin sin\,(30° + 150°) \;\; \sin sin\,(30° + 150°) \;\; c$$

$$(x'' \; y'') = (\cos cos\,(180°) \;\; - \sin sin\,(180°) \;\; \sin sin\,(180°) \;\; \cos cos\,(180°)\;)(3 \; 4)$$

$$(x'' \; y'') = (-\;1\;0\;0\;\; -\;1\;)(3\;4\;)$$

$$(x'' \; y'') = (-\;3\;\; -\;4\;)$$

Jadi, bayangan titik $A(3,4)$ adalah $A''(-\,3, -\,4)$

b. Komposisi Dua Rotasi Berurutan terhadap Titik Pusat $P(a, b)$

Bayangan titik $A(x, y)$ oleh rotasi $R[O(0, 0), \alpha]$ dilanjutkan dengan rotasi $R[P(a, b), \beta]$ adalah $A''(x'', y'')$ dengan:

$$(x'' \; - \; a \; y'' \; - \; b\;) = (\cos cos\,(\alpha + \beta) \;\; - \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \cos cos\,($$

$$(x'' \; y'') = (\cos cos\,(\alpha + \beta) \;\; - \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \sin sin\,(\alpha + \beta) \;\; \cos cos\,(\alpha + \beta)\;)$$

Contoh soal:

Tentukan bayangan titik $A(4, 6)$ oleh rotasi $R[O(0, 0), 30°]$ dilanjutkan dengan rotasi $R[P(2, 1), 60°]$!

Jawab:

$(x" \; y") = (\cos cos \; (30° + 60°) \;\; - \sin sin \; (30° + 60°) \;\; \sin sin \; (30° + 60°) \;\; \cos co$

$(x" \; y") = (\cos cos \; (90°) \;\; - \sin sin \; (90°) \;\; \sin sin \; (90°) \;\; \cos cos \; (90°) \;\;)(2 \; 5) + (2$

$(x" \; y") = (0 \;\; - 1 \; 1 \; 0 \;)(2 \; 5) + (2 \; 1)$

$(x" \; y") = (- \; 5 \; 2) + (2 \; 1)$

$(x" \; y") = (- \; 3 \; 3)$

Jadi, bayangan titik $A(4, 6)$ adalah $A"(- \; 3, 3)$

<u>Contoh soal komposisi rotasi dilanjutkan transformasi lain:</u>

Tentukan bayangan titik $A(2, 2)$ oleh rotasi pada titik pusat $O(0, 0)$ sebesar $90°$ berlawanan arah dengan jarum jam, lalu dilanjutkan didilatasi $[O, 2]$.

Jawab:

$A(2, 2) \quad R \quad \rightarrow A'(x', y') \qquad D \qquad \rightarrow A"(x", y")$

$(x' \; y') = (\cos cos \; 90° \;\; - \sin sin \; 90° \;\; \sin sin \; 90° \;\; \cos cos \; 90° \;\;)(2 \; 2)$

$(x' \; y') = (0 \;\; - 1 \; 1 \; 0 \;)(2 \; 2)$

$(x' \; y') = (- \; 2 \; 2)$

$(x" \; y") = (2 \; 0 \; 0 \; 2 \;)(- \; 2 \; 2)$

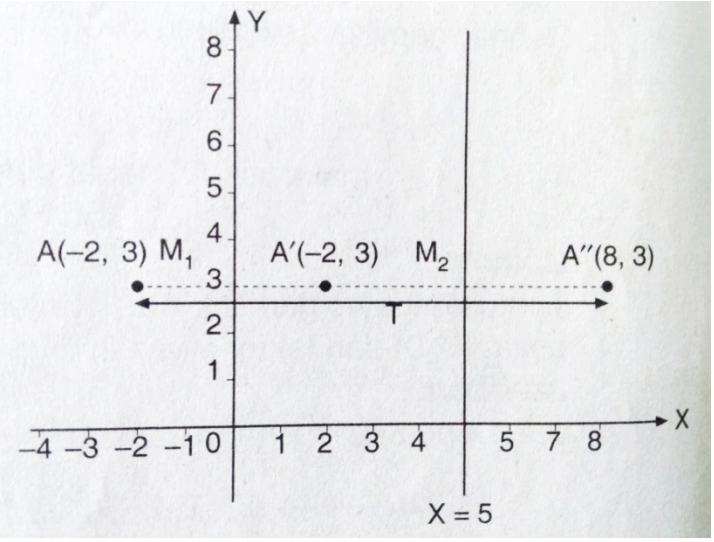
$(x" \; y") = (- \; 4 \; 4)$

Jadi, bayangan titik $A(2, 2)$ adalah $A"(- \; 4, 4)$

3. Komposisi Refleksi

a. Refleksi terhadap Dua Sumbu Sejajar

Perhatikan gambar di bawah ini.



Pada titik $A(-2,3)$ diberlakukan dua transformasi refleksi berurutan, yaitu terhadap sumbu Y dan terhadap garis $x = 5$. Kedua sumbu refleki tersebut sejajar. Jarak antarsumbu refleksi sama dengan jarak antara sumbu Y dan garis $x = 5$. dengan demiian, jarak antar sumbu refleksi = 5. Bayangan titik $A(-2,3)$ oleh refleksi terhadap sumbu Y adalah $A'(2,3)$. Bayangan titik $A'(2,3)$ oleh refleksi terhadap garis $x = 5$ adalah $a''(8,3)$.

Perhatikan bahwa komposisi refleksi tersebut dapat diwakili oleh translasi T. Arah translasi tersebut tegak lurus sumbu-sumbu refleksi dan jaraknya 2 kali jarak antarsumbu refleksi.

Jadi, komposisi refleksi terhadap dua sumbu sejajar dapat diwakili oleh sebuah translasi yang tegak lurus ke kedua sumbu refleksi dan jaraknya dua kali jarak antarsumbu refleksi.

Ingat, urutan refleksi pada komposisi refleksi tersebut tidak boleh ditukar. Dengan kata lain, pada komposisi refleksi tidak berlaku sifat komulatif. Sebagai catatan, jarak translasi dapat berupa bilangan negatif. Bilangan negatif terebut muncul jika arah translasi ke kiri atau ke bawah.

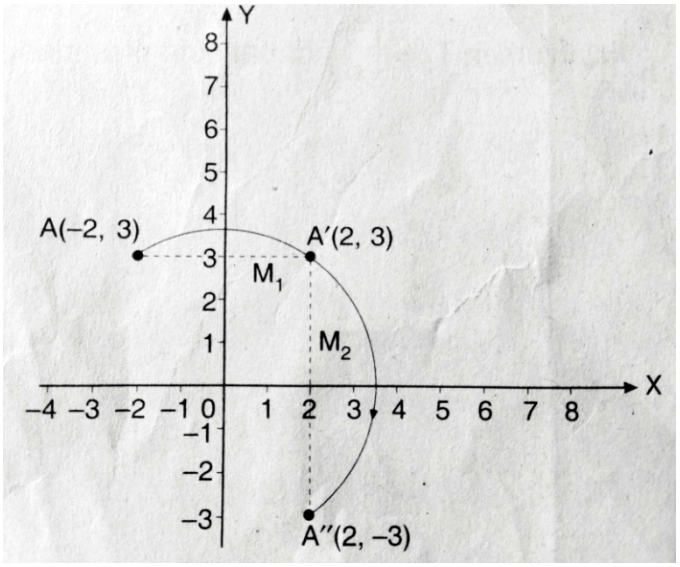
b. Refleksi terhadap Dua Sumbu yang Sama

Misalkan titik A(x, y) direfleksikan terhadap sumbu Y. Bayangannya adalah A'$(x, -y)$. Titik A'$(x, -y)$ direfleksikan terhadap sumbu yang sama, yaitu sumbu Y. Bayangannya adalah A ''$(x, -(-y)) = A''(x, y)$. Perhatikan bahwa titik A(x, y) dan titik $A''(x, y)$ mempunyai koordinat yang sama.

Jadi refleksi terhadap dua sumbu yang sama akan mengakibatkan titik bayangan berimpit dengan titik mula-mula.

c. Refleksi terhadap Dua Sumbu yang Saling Tegak Lurus

Perhatikan gambar berikut.



Pada titik A$(-2, 3)$ diberlakukan dua trnasformasi refleksi berurutan, yaitu terhadap sumbu Y dan terhadap sumbu X. Mengingat sumbu X dan sumbu Y saling tegak lurus.

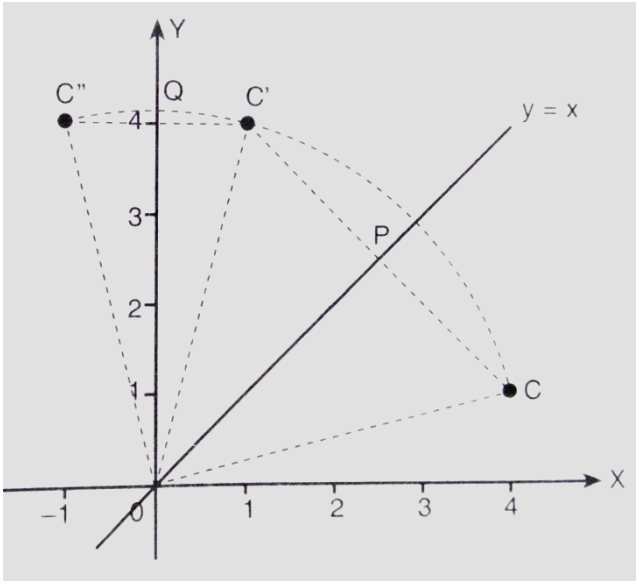
Bayangan titik A$(-2, 3)$ oleh refleksi terhadap sumbu Y adalah A '$(2, 3)$. Bayangan titik A'$(2, 3)$, oleh refleksi trhadap sumbu X adalah A ''$(-2, 3)$.

Perhatikan juga bahwa komposisi refleksi tersebut dapat diwakili oleh rotasi $180°$. Arah rotasi tersebut tidak berpengaruh terhadap bayangan akhir titik A.

Jadi, komposisi refleksi terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus dapat diwakili oleh sebuah rotasi dengan besar sudut putaran dan berpusat di titik potong sumbu-sumbu refleksi.

d. Refleksi terhadap Dua Sumbu yang Saling Berpotongan

Perhatikan gambar berikut.



Gambar tersebut menunjukkan titik C direfleksikan berturut-turut terhadap garis $y = x$ dan sumbu Y. Garis $y = x$ merupakan sumbu refleksi pertama, sedangkan sumbu Y merupakan sumbu refleksi kedua. Kedua sumbu refleksi berpotongan di titik O(0,0).

Bayangan titik C(x, y) oleh refleksi terhadap garis $y = x$ adalah C '(x', y'). Bayangan titik C'(x', y') oleh refleksi terhadap sumbu Y adalah C ''(x'', y''). Perhatikan bahwa titik C(x, y), C'(x', y'), dan C''(x'', y'') terletak

Jadi, komposisi refleksi terhadap dua sumbu yang saling berpotongan dapat diwakili oleh rotasi sejauh dua kali besar sudut yang terbentuk oleh sumbu-sumbu refleksi dan berpusat di titik potong kedua sumbu. Arah rotasinya adalah dari sumbu refleki pertama ke sumbu refleksi kedua..

Komposisi Refleksi dengan Transformasi Geometri yang Lain

Contoh

Titik A$(-5,-10)$ direfleksikan terhadap garis $y=-x$ dan dilanjutkan dengan translasi T $=(2\ 9)$. Bayangan titik A adalah...

Jawab :

$A(x,y) \quad M_{y=-x} \quad \rightarrow A'(-y,-x)$

$\Leftrightarrow A(-5,-10) \quad M_{y=-x} \quad \rightarrow A'(-(-10),-(-5))$

$\Leftrightarrow A(x,y) \quad M_{y=-x} \quad \rightarrow A'(10,5)$

$A'(x',y')\ T=(a\ b) \rightarrow A''(x'+a, y'+b)$

$\Leftrightarrow A'(10,5)\ T=(2\ 9) \rightarrow A''(10+2,\ 5+9)$

$\Leftrightarrow A'(10,5)\ T=(2\ 9) \rightarrow A''(12,\ 14)$

Jadi bayangan titik A adalah $A''(12,\ 14)$

4. Komposisi Dilatasi

a. Dilatasi-dilatasi

Contoh

Bayangan titik A$(2,3)$ oleh dilatasi P(1,5) dan faktor skala -2. kemudian dilanjutkan dengan dilatasi dengan pusat (2,3) dan faktor skala 2.

Jawab

1) $A(x,y)\ [P,k] \rightarrow A'(kx-ka+a,\ ky-kb+b)$

$\Leftrightarrow A(2,3)\ [P,k] \rightarrow A'(-2(2)-(-2)1+1,\ -2(3)-(-2)\,5+5$

$\Leftrightarrow A(2,3)\ [P,k] \rightarrow A'(-4+2+1,\ -6+10+5)$

$\Leftrightarrow A(2,3)\ [P,k] \rightarrow A'(-1,\ 9)$

2) $A'(x',y')\ \left[P_1,k\right] \rightarrow A''(kx'-ka+a,\ ky'-kb+b)$

$\Leftrightarrow A'(-1,9)\left[P_1,2\right]\rightarrow A''(2(-1)-2(2)+2,\ 2(9)-2(3)+3)$

$\Leftrightarrow A'(-1,9)\left[P_1,2\right]\rightarrow A''(-2-4+2,\ 18-6+3)$

$\Leftrightarrow A'(-1,9)\left[P_1,2\right]\rightarrow A''(-4,\ 15)$

Dilatasi dengan transformasi geometri lainnya

Contoh 8

Titik B$(1,-10)$. Titik B didilatasi dengan titik pusat C(2,3) dan faktor skala -2. Transformasi dilanjutkan dengan reflksi terhadap sumbu X. Koordinat bayangan titik B adalah..

Jawab:

Misalkan T_1 adalah transformasi yang memetakkan A(x,y) ke titik $A'(x',y')$ dan T_2 adalah transformasi yang memetakkaM titik $A'(x',y')$ ke titik $A''(x'',y'')$. maka Bentuk tersebut dapat ditulis dengan $T_2 \circ T_1$.

$B(x,y) \xrightarrow[T_2\circ T_1]{} B''(x'',y'')$

$B(1,-10) \xrightarrow[[C(2,3),-2]]{} B'(x',y')$

$(x'\ y') = (-2\ 0\ 0\ -2)(1\ -2\ -10\ -3) + (2\ 3)$

$(x'\ y') = (-2\ 0\ 0\ -2)(-1\ -13) + (2\ 3)$

$(x'\ y') = (-2(-1)\ -2(-13)) + (2\ 3)$

$(x'\ y') = (2\ 26) + (2\ 3)$

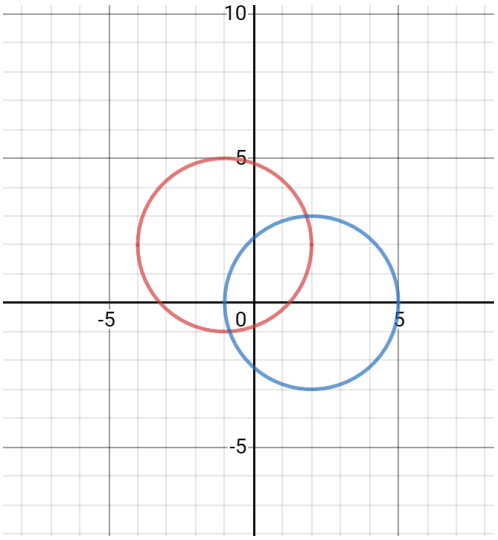
$(x'\ y') = (4\ 29)$

$B'(x',y') \xrightarrow{M_x} B''(x',-y')$

$B'(4,29) \xrightarrow{M_x} B''(4,-29)$

Persamaan Bayangan Kurva oleh Komposisi Transformasi Geometri

Perhatikan gambar di samping.



Gambar tersebut menunjukkan lingkaran $(x-2)^2+y^2=9$ beserta bayangannya. Bayangan lingkaran yang dihasilkan oleh refleksi lingkaran $(x-2)^2+y^2=9$ terhadap sumbu Y dan dilanjutkan dengan translasi $\mathrm{T}=(1\ 2)$. Perhatikan bahwa bayangan yang dihasilkan memiliki persamaan $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Bayangan tersebut sebagai hasil komposisi transformasi geometri terhadap kurva.

Langkah-langkah untuk menentukan bayangan sebuah kurva oleh komposisi transformasi sebagai berikut :

1. Persamaan kurva yang akan ditransformasi dalam bentuk x dan y. Anggaplah titik (x, y) terletak pada kurva.
2. Tentukan bayangan titik (x, y) oleh transformasi pertama. Titik ini disebut bayangan (x, y) oleh transformasi pertama.
3. Titik bayangan yang diperoleh pada langkah kedua ditransformasi lagi oleh transformasi kedua. Misalkan bayangannya adalah $\left(x', y'\right)$. Dengan demikian dipeloreh persamaan x' dan y'. Ubahlah persamaan tersebut menjadi persamaan eksplisit yang menyatakan x dalam variabel x' atau y' serta y dalam variabel x' atau y'.
4. Substitusikan x dan y yang diperoleh pada langkah 3 ke dalam persamaan kurva. Dengan demikian akan diperoleh bentuk persamaan kurva dalam x' dan y'. Kemudian gantilah x' dengan x dan y' dengan y. Persamaan yang dihasilkan merupakan bayangan kurva oleh komposisi trnasformasi.

Contoh

Lingkaran A mempunyai persamaan $(x-3)^2+(y+4)^2=49$. Lingkaran tersebut dirotasikan dengan pusat titik O sejauh $90°$ searah jarum jam. Transformasi dilanjutkan dengan mencerminkan terhadap sumbu X. Tentukan persamaan bayangan lingkaran tersebut.

Jawaban:

Ambil titik (x, y) pada lingkaran $(x-3)^2+(y+4)^2=49$. Titik (x, y) dirotasikan dengan pusat titik O sejauh 90° searah jarum jam sehingga diperoleh :
$(x, y)\ R[O(0,0), -90°] \rightarrow (y, -x)$

$(y, -x) \quad M_X \quad \rightarrow (y, x)$

$x' = y \Leftrightarrow y = x'$

$y' = x \Leftrightarrow x = y'$

Substitusikan $x = y'$ dan $y = x'$ ke dalam persamaan $(x-3)^2+(y+4)^2=49$.
$(x-3)^2+(y+4)^2=49$

$(y'-3)^2+(x'+4)^2=49.$

Gantilah x' dengan x dan y' dengan y sehingga diperoleh :
$(y'-3)^2+(x'+4)^2=49$
$\Leftrightarrow (y-3)^2+(x+4)^2=49$
$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=49$

Jadi persamaan bayangan lingkaran A oleh rotasi dengan pusat titik O sejauh 90° searah jarum jam dan pencerminan terhadap sumbu X adalah $(x+4)^2+(y-3)^2=49$