Centrale-Supelec 1993 - Physique M et P'

Partie I- Onde de courant dans une ligne électrique:

I.1) Equations différentielles liant i(x,t) et u(x,t):

Loi des noeuds: $i(x,t) - i(x+dx,t) = Cdx\frac{\partial u}{\partial t} = C\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x}$

Loi des mailles: $u(x,t) - u(x+dx,t) = Ldx\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow -L\frac{\partial i}{\partial t}$

I.2) Vitesse de phase et expressions de i(x,t) et de u(x,t):

On en déduit les équations de propagation: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; la fonction I(x) vérifie l'équation $\frac{d^2 I}{dx^2} + LC\omega^2 I = 0$ dont l'équation caractéristique $p^2 + LC\omega^2 = 0$ admet les racines $p = \pm j\sqrt{LC}\omega = \pm j\frac{\omega}{v_\varphi}$; d'où:

$$I(x) = I_1 e^{-j\omega\frac{x}{v_\varphi}} + I_2 e^{j\omega\frac{x}{v_\varphi}} \quad \text{et} \quad i(x,t) = I_1 e^{j\omega(t-\frac{x}{v_\varphi})} + I_2 e^{j\omega(t+\frac{x}{v_\varphi})}$$

Une des deux équations différentielles liant u et i permet d'obtenir l'expression de u(x,t):

$$u(x,t) = \frac{1}{v_\varphi C}\left[I_1 e^{j\omega(t-\frac{x}{v_\varphi})} - I_2 e^{j\omega(t+\frac{x}{v_\varphi})}\right]$$

I.3) Impédance caractéristique:

En x=0: $u = Z_0 i$; or à l'abscisse x<0 l'impédance est définie par

$Z(x) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)} = \frac{1}{v_\varphi C}\frac{I_1 e^{-j\omega\frac{x}{v_\varphi}} - I_2 e^{j\omega\frac{x}{v_\varphi}}}{I_1 e^{-j\omega\frac{x}{v_\varphi}} + I_2 e^{j\omega\frac{x}{v_\varphi}}}$; Z(x) est indépendante de x si $I_2 = 0 \Rightarrow Z_c = \frac{1}{v_\varphi C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $Z(0) = Z_c$. Alors l'onde est progressive et se propage en sens >0 de x'x à la célérité v_φ.

$p = Re(u)Re(i) = \frac{1}{4}(u+u^*)(i+i^*)$; mais < ui>=0 et $+u^*i^* = 0$; avec $u = Z_c i$, on obtient:

$P = -p = -\frac{1}{2}Z_c|u|^2 = \frac{I_1^2}{2Z_c}$. En x=0, la puissance moyenne est dissipée dans l'impédance caractéristique Z_0, réelle, par effet Joule.

I.4.a) Impédance équivalente:

$Z_1 = Z_c // Z_c = Z_1 = \frac{Z_c}{2}$

I.4.b)Coefficient de reflexion en intensité:

Par définition: $r = \frac{i_r(0,t)}{i_i(0,t)}$ (coefficient de réflexion) et $t = \frac{i_t(0,t)}{i_i(0,t)}$ (coefficient de transmission)

Continuité de la tension: $u_i + u_r = u_t = Z_c i_i - Z_c i_r = Z_c i_t = i_i - i_r = i_t$ et $1 - r = t$

Loi des noeuds: $i_i - i_r = 2i_t$ (i_t dans Z_c et dans la ligne à droite) $= 1 - r = 2t$; on en déduit $r = \frac{1}{3}$.

I.5.a) Forme de l'onde de courant entre x=0 et x=l:

On a la superposition de deux ondes progressives de sens de propagation opposés:

$i = I_t e^{j\omega(t-\frac{x}{v_\varphi})} - I_r e^{j\omega(t+\frac{x}{v_\varphi})}$ et $\frac{u}{Z_c} = I_t e^{j\omega(t-\frac{x}{v_\varphi})} + I_r e^{j\omega(t+\frac{x}{v_\varphi})}$

En x=l, u=0 (court-circuit): $I_t e^{-j\omega\frac{l}{v_\varphi}} = I_r e^{j\omega\frac{l}{v_\varphi}} \Rightarrow i = 2I_t e^{j\omega(t-\frac{l}{v_\varphi})}\cos\frac{\omega(l-x)}{v_\varphi}$

I.5.b) Coefficient de réflexion:

i=0 $\forall t, x = l - (2q+1)\frac{\lambda}{4}, q \in Z$; on veut que ceci soit vrai en x=0 d'où $l = (2q+1)\frac{\lambda}{4}$; la valeur minimale possible est $l_0 = \frac{\lambda}{4}$ et alors $I_r = -I_t$, u(0,t)= $2Z_c I_t e^{j\omega t}$; en écrivant la continuité de la tension et la loi des noeuds, on a: $u_i + u_r = 2Z_c I_t e^{j\omega t}$ et $i_i + i_r = 2I_t e^{j\omega t}$ et $i_i - i_r = 2I_t e^{j\omega t} \Rightarrow$ r=0.

Partie II-Champ électromagnétique dans la ligne:

II.1) Expression des champs en fonction des densités:

Le champ magnétique est selon z'z et le champ électrique selon y'y.Equation de passage du champ magnétique: $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{12}$ et $B(x,t) = \mu_0 j_s(x,t)$ et $i(x,t) = a j_s$ $B(x,t) = \frac{\mu_0}{a} i(x,t)$;

Equation de passage du champ électrique: $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(x,t)}{\varepsilon_0}\vec{N}_{12}$ et $E(x,t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$;

II.2) Equations différentielles vérifiées par les densités:

L'équation de Maxwell-Faraday donne: $\vec{B} = -\frac{1}{j\omega}\frac{\partial E}{\partial x}\vec{u}_z$ et $i(x,t) = -\frac{ac^2}{j\omega}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$

L'équation de Maxwell-Ampère donne: $\vec{E} = -\frac{c^2}{j\omega}\frac{\partial B}{\partial x}\vec{u}_y$ et $\sigma = -\frac{1}{j\omega a}\frac{\partial i}{\partial x}$

II.3) Coefficient d'autoinduction:

Pour la longeur dx de ligne, de section droite S=ab, $d\Phi_B = abdx\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 b}{2a} i^2 dx$ et $L = \frac{\mu_0 b}{a}$

II.4) Coefficient de capacité:

Pour la longueur dx de la ligne: $d\Phi_E = abdx\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = abdx\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{bq^2}{2a\varepsilon_0 dx}$ et $C = \frac{\varepsilon_0 a}{b}$

II.5) Vitesse de phase:

$LC = \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ et $v_\varphi = c$; il y a accord avec le précédent résultat.

II.6) Définition de la d.d.p. u(x,t):

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; or le potentiel vecteur est polaire et de ce fait perpendiculaire au plan d'antisymétrie des courants, selon x'x $u = -\int_{y=b}^{y=0} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{y=b}^{y=0} -\vec{\nabla}V.d\vec{l} = V(x,b,t) - V(x,0,t) = u(x,t)$ $\Rightarrow$ E(x,t)=bu(x,t).

II.3.a) Expression de l'impédance caractéristique:

$Z_c = \frac{b}{ea}$ et $R_c = \frac{\rho}{e}$ et $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{b}{a}$ si $b \ll a, R_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

A.N.: $R_c = 377\Omega$

II.3b) Calcul numérique de e:

Cuivre: e=45 pm; impossible car e< à la dimension d'un atome.Carbone: e=9,28 µm.

II.8) Puissance moyenne transportée par l'onde:

Vecteur de Poynting: $\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{ui}{ab}\vec{u}_x$ et puissance instantanée: p=Re(u)Re(i)

P=<p>= $\frac{1}{4}(ui^* + u^*i) = \frac{1}{2}Z_c|i|^2$ $P = \frac{1}{2}Z_c I^2$

L'énergie est dissipée dans l'impédance caractéristique (résistance) par effet Joule.

Partie III-Reflexion d'une onde électromagnétique sur une plaque conductrice:

III.1) Coefficient de reflexion:

On est ramené à la question I.4.a; l'onde progressive peut se propager en aval de la plaque $r = \frac{1}{3}$

III.2) Expression de l'épaisseur de l'effet de peau:

On suppose la conductivité du métal réelle; c'est possible si la fréquence est nettement inférieure aux fréquences optiques; dans l'équation de Maxwell-Ampère, on peut négliger le courant de déplacement devant le courant ohmique si, en utilisant la notation complexe, $\|j\omega\varepsilon_0\vec{E}\| \ll \|\gamma\vec{E}\| \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \gg 1$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} = -jk\vec{E} = \mu_0\gamma\vec{E}$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\vec{B} = -jk\vec{E} = -j\omega\vec{B}$

$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ (métal neutre) et $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ $\Rightarrow \vec{k}.\vec{E} = 0$ et $\vec{k}.\vec{B} = 0$

En reportant le champ magnétique tiré de la seconde équation dans la première et en developpant le produit vectoriel, on obtient:

$$k^2 = -j\mu_0\gamma\omega = \omega\mu_0\gamma \Rightarrow k = \frac{1-j}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

On a deux solutions; la solution générale en est une combinaison linéaire.

$$\vec{E}_p = \left(A_1 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} + A_2 e^{\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t + \frac{x}{\delta})}\right)\vec{u}_y \text{ et } \vec{B}_p = \frac{1-j}{\omega\delta}\left(A_1 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} - A_2 e^{\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t + \frac{x}{\delta})}\right)\vec{u}_z$$

III.3) Relations entre les coefficients:

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{j\omega(t+\frac{x}{c})}\vec{u}_y \text{ et } \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} e^{j\omega(t+\frac{x}{c})}\vec{u}_z \text{ et } \vec{E}_t = -E_0 e^{j\omega(t-\frac{x}{c})}\vec{u}_y \text{ et } \vec{B}_t = \frac{E_0}{c} e^{j\omega(t-\frac{x}{c})}\vec{u}_z$$

Equations de passage: en x=0, il y a continuité du champ électrique tangentiel et du champ magnétique tangentiel(car les courants sont volumiques et non surfaciques);

$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_p \Rightarrow (1-r)E_0 = A_1 + A_2$

$\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_p \Rightarrow (1+r)E_0 = \frac{c(1-j)}{\omega\delta}(A_1 - A_2)$

Equations de passage en x=e:

$$A_1 e^{-(1-j)\frac{e}{\delta}} + A_2 e^{(1-j)\frac{e}{\delta}} = -E_0 e^{-j\omega\frac{e}{c}} \text{ et } \frac{1-j}{\omega\delta}\left(A_1 e^{-(1-j)\frac{e}{\delta}} - A_2 e^{(1-j)\frac{e}{\delta}}\right) = -\frac{E_0}{c} e^{-j\omega\frac{e}{c}}$$

III.4) Expression de α:

On considère le seul cas possible: celui du carbone avec e=9,28 µm; $\delta = \frac{29.8}{\sqrt{\omega}}m$

$e \ll \delta \Rightarrow \omega \ll 1,03.10^{13} Hz$; or la formule établie pour δ n'est valable qu'aux fréquences très inférieures aux fréquences optiques; la condition qu'on vient d'obtenir étant déjà nécessaire, l'inégalité e<<δ est donc vérifiée.

Les deux dernières relations de III.3, en utilisant $e^{-\frac{e}{\delta}} \ll 1$, conduisent à:

$$A_1 - A_2 = \frac{e}{\delta}(1-j)(A_2 - A_1) = -E_0 e^{-j\omega\frac{e}{c}} \text{ et } \frac{c(1-j)}{\omega\delta}\left(A_1 - A_2\right) - (1-j)\frac{e}{\delta}(A_1 - A_2) = -E_0 e^{-j\omega\frac{e}{c}}$$

d'où $\rho = \frac{(1-j\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}k)^2}{1-\frac{\omega^2}{ce}-j\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}k)^2}$; or $\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}k \ll 1$ et $\frac{\omega^2}{ce} = 2\frac{R_c}{\mu_0 c} \ll 2$ $\Rightarrow \rho \approx -\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{ce}} \approx -\frac{1}{3}$

Mais $r = \frac{1}{3}$ est relatif au coefficient de réflexion de i(x,t), donc de B(x,t) opposé à celui de E(x,t).

III.5) Positionnement d'une plaque de métal parfait:

D'aprèsI.5.b, pour annuler l'onde réfléchie, il faut placer, à la distance $x = e = \frac{\lambda}{4}$, une plaque de métal parfaitement conducteur. On peut le vérifier: sur le métal parfait, on a un noeud de champ électrique, donc en x= e on a un noeud de champ magnétique(propriété des ondes stationnaires) et de ce fait en x=e: $\frac{1-j}{\delta}\left[A_2 - (1-j)\frac{e}{\delta}(A_1 - A_2)\right] = 0 \Rightarrow \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_2} = (1-j)\frac{e}{\delta}$; par ailleurs les deux premières relations de III.3 restent valables $\rho = \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\omega}{c(1-j)}\frac{1-\rho}{1+\rho}$; on en déduit $\rho = 0$ comme prévu.