

Centrale-Supelec 1993 - Physique M et P'

Partie I- Onde de courant dans une ligne électrique:

I.1) Equations différentielles liant $i(x,t)$ et $u(x,t)$:

Loi des noeuds:
$$i(x,t) - i(x+dx,t) = C dx \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow C \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial x}$$

Loi des mailles:
$$u(x,t) - u(x+dx,t) = L dx \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

I.2) Vitesse de phase et expressions de $i(x,t)$ et de $u(x,t)$:

On en déduit les équations de propagation:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

La vitesse de phase est $v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; la fonction $I(x)$ vérifie l'équation $\frac{d^2 I}{dx^2} = LC I = 0$ dont

l'équation caractéristique $p^2 + LC = 0$ admet les racines $p = \pm j\sqrt{LC} = \pm j \frac{1}{v_0}$; d'où:

$$I(x) = I_1 e^{j \frac{x}{v_0}} + I_2 e^{-j \frac{x}{v_0}} \quad \text{et} \quad i(x,t) = I_1 e^{j(t - \frac{x}{v_0})} + I_2 e^{-j(t - \frac{x}{v_0})}$$

Une des deux équations différentielles liant u et i permet d'obtenir l'expression de $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{v_0 C} \left[I_1 e^{j(t - \frac{x}{v_0})} + I_2 e^{-j(t - \frac{x}{v_0})} \right]$$

I.3) Impédance caractéristique:

En $x=0$: $u = Z_0 i$; or à l'abscisse $x < 0$ l'impédance est définie par

$$Z(x) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)} = \frac{1}{v_0 C} \frac{I_1 e^{j(t - \frac{x}{v_0})} + I_2 e^{-j(t - \frac{x}{v_0})}}{I_1 e^{j(t - \frac{x}{v_0})} + I_2 e^{-j(t - \frac{x}{v_0})}}; \quad Z(x) \text{ est indépendante de } x \text{ si } I_2 = 0 \Rightarrow Z_c = \frac{1}{v_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

et $Z(0) = Z_c$. Alors l'onde est progressive et se propage en sens >0 de x à la célérité v_0 .

$$p = \operatorname{Re}(u) \operatorname{Re}(i) = \frac{1}{4} (u + u^*) (i + i^*) ; \text{ mais } \langle u_i \rangle = 0 \text{ et } \langle u^* i^* \rangle = 0; \text{ avec } u = Z_c i, \text{ on obtient:}$$

$$P = p = \frac{1}{2} Z_c |u|^2 = \frac{I_1^2}{2 Z_c} . \text{ En } x=0, \text{ la puissance moyenne est dissipée dans l'impédance caractéristique } Z_0, \text{ réelle, par effet Joule.}$$

I.4.a) Impédance équivalente:

$$Z_1 = Z_c // Z_c = Z_1 \parallel \frac{Z_c}{2}$$

I.4.b) Coefficient de reflexion en intensité:

Par définition: $r = \frac{i_r(0,t)}{i_i(0,t)}$ (coefficient de réflexion) et $t = \frac{i_t(0,t)}{i_i(0,t)}$ (coefficient de transmission)

Continuité de la tension: $u_i = u_r = u_t \Rightarrow Z_c i_i = Z_c i_r + Z_c i_t \Rightarrow i_i = i_r + i_t \text{ et } 1 = r + t$

Loi des noeuds: $i_i = i_r + 2i_t$ (dans Z_c et dans la ligne à droite) $\Rightarrow 1 = r + 2t$; on en déduit $r = \frac{1}{3}$.

I.5.a) Forme de l'onde de courant entre $x=0$ et $x=l$:

On a la superposition de deux ondes progressives de sens de propagation opposés:

$$i = I_t e^{j\omega(t - \frac{x}{v_0})} + I_r e^{j\omega(t + \frac{x}{v_0})} \quad \text{et} \quad \frac{u}{Z_c} = I_t e^{j\omega(t - \frac{x}{v_0})} - I_r e^{j\omega(t + \frac{x}{v_0})}$$

$$\text{En } x=l, u=0 \text{ (court-circuit): } I_t e^{j\omega(t - \frac{l}{v_0})} - I_r e^{j\omega(t + \frac{l}{v_0})} = 0 \Rightarrow I_r = I_t e^{j\omega(t - \frac{l}{v_0})} e^{-j\omega(t + \frac{l}{v_0})} = I_t e^{-j\omega \frac{2l}{v_0}} = I_t \cos\left(\frac{2\omega l}{v_0}\right)$$

I.5.b) Coefficient de réflexion:

En $x=0$, $u=0$ (court-circuit): $I_t e^{j\omega t} - I_r e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow I_r = I_t$; on veut que ceci soit vrai en $x=0$ d'où $I_r = I_t \cos\left(\frac{2\omega l}{v_0}\right)$; la valeur minimale possible est $I_r = I_t \cos\left(\frac{2\omega l}{v_0}\right)$ et alors $I_r = I_t$, $u(0,t) = 2Z_c I_t e^{j\omega t}$; en écrivant la continuité de la tension et la loi des noeuds, on a: $u_i = u_r + 2Z_c I_t e^{j\omega t} = I_i Z_c + I_r Z_c + 2Z_c I_t e^{j\omega t}$ et $I_i = I_r + 2I_t \Rightarrow r=0$.

Partie II-Champ électromagnétique dans la ligne:

II.1) Expression des champs en fonction des densités:

Le champ magnétique est selon z/z et le champ électrique selon y/y. Equation de passage du champ

magnétique: $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_s(x,t)}{r^2} dx$ et $i(x,t) = \frac{1}{a} \int B_z(x,t) dx$;

Equation de passage du champ électrique: $E_y = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\rho(x,t)}{r^2} dx$;

II.2) Equations différentielles vérifiées par les densités:

L'équation de Maxwell-Faraday donne: $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$;

L'équation de Maxwell-Ampère donne: $\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial i}{\partial t}$;

II.3) Coefficient d'autoinduction:

Pour la longueur dx de ligne, de section droite $S=ab$, $dL_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{B^2}{a} dx$;

II.4) Coefficient de capacité:

Pour la longueur dx de la ligne: $dC_E = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E^2}{a} dx$;

II.5) Vitesse de phase:

$LC = \frac{1}{c^2}$; il y a accord avec le précédent résultat.

II.6) Définition de la d.d.p. $u(x,t)$:

$E = -\frac{\partial V}{\partial x}$; or le potentiel vecteur est polaire et de ce fait perpendiculaire au plan d'antisymétrie

des courants, selon x/x $\Rightarrow E(x,t) = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$;

II.3.a) Expression de l'impédance caractéristique:

$Z_c = \frac{b}{\epsilon a} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $R_c = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{L}{C}}$ si $b \ll a$, $R_c = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{L}{C}}$

A.N.: $R_c = 377 \Omega$

II.3b) Calcul numérique de e:

Cuivre: $e=45 \text{ pm}$; impossible car $e \ll$ à la dimension d'un atome. Carbone: $e=9,28 \text{ } \mu\text{m}$.

II.8) Puissance moyenne transportée par l'onde:

Vecteur de Poynting: $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ et puissance instantanée: $p = \text{Re}(\vec{u}) \cdot \text{Re}(\vec{i})$
 $P = \langle p \rangle = \frac{1}{4} (\vec{u}^* \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} Z_c |i|^2 = P = \frac{1}{2} Z_c I^2$
 L'énergie est dissipée dans l'impédance caractéristique (résistance) par effet Joule.

Partie III-Reflexion d'une onde électromagnétique sur une plaque conductrice:

III.1) Coefficient de réflexion:

On est ramené à la question I.4.a; l'onde progressive peut se propager en aval de la plaque $r = \frac{1}{3}$

III.2) Expression de l'épaisseur de l'effet de peau:

On suppose la conductivité du métal réelle; c'est possible si la fréquence est nettement inférieure aux fréquences optiques; dans l'équation de Maxwell-Ampère, on peut négliger le courant de déplacement

devant le courant ohmique si, en utilisant la notation complexe, $\|j\omega \vec{E}\| \gg \|\vec{\partial} \vec{E} / \partial t\|$
 Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \vec{B} / \partial t &= -j\omega \vec{E} \\ \vec{\partial} \vec{E} / \partial t &= j\omega \vec{B} \\ \vec{\partial} \cdot \vec{E} &= 0 \text{ (métal neutre)} \text{ et } \vec{\partial} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\partial} \times \vec{E} &= 0 \text{ et } \vec{\partial} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

En reportant le champ magnétique tiré de la seconde équation dans la première et en développant le

produit vectoriel, on obtient:

$$k^2 = j\omega \mu_0 \sigma \quad k = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

On a deux solutions; la solution générale en est une combinaison linéaire.

$$\vec{E}_p = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} + A_2 e^{j(\omega t + kx)} \quad \vec{B}_p = \frac{1-j}{\omega \mu_0} \left(\vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} - A_2 e^{j(\omega t + kx)} \right)$$

III.3) Relations entre les coefficients:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \vec{B}_r = \frac{\mu_0 E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \quad \vec{E}_t = \vec{E}_0 e^{j(\omega t + kx)} \quad \vec{B}_t = \frac{\mu_0 E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)}$$

Equations de passage: en $x=0$, il y a continuité du champ électrique tangentiel et du champ magnétique tangentiel (car les courants sont volumiques et non surfaciques);

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{E}_r + \vec{E}_p = (1+r) \vec{E}_0 = A_1 + A_2 \\ \vec{B}_i &= \vec{B}_r + \vec{B}_p = (1+r) \vec{E}_0 \frac{c(1-j)}{\omega \mu_0} = (A_1 + A_2) \frac{c(1-j)}{\omega \mu_0} \end{aligned}$$

Equations de passage en $x=e$:

$$A_1 e^{j(1-j)e/\delta} + A_2 e^{j(1+j)e/\delta} = E_0 e^{j\omega e/c} \quad \text{et} \quad \frac{1-j}{\omega \mu_0} (A_1 e^{j(1-j)e/\delta} - A_2 e^{j(1+j)e/\delta}) = \frac{E_0}{c} e^{j\omega e/c}$$

III.4) Expression de α :

On considère le seul cas possible: celui du carbone avec $e = 9,28 \mu\text{m}$; $\delta = \frac{29.8}{\sqrt{\omega}} \text{m}$

$e \ll \delta \Rightarrow 1,03 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$; or la formule établie pour δ n'est valable qu'aux fréquences très inférieures aux fréquences optiques; la condition qu'on vient d'obtenir étant déjà nécessaire, l'inégalité $e \ll \delta$ est donc vérifiée.

Les deux dernières relations de III.3, en utilisant $e \ll \delta$, conduisent à:

$$A_1 + A_2 = \frac{e}{\delta} (1-j) (A_2 - A_1) = E_0 \frac{e}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{c(1-j)}{\omega \mu_0} (A_1 - A_2) = (1-j) \frac{e}{\delta} (A_1 + A_2) = E_0 \frac{e}{\delta}$$

d'où $\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$; or $\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$ et $\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$

Mais $r = \frac{1}{3}$ est relatif au coefficient de réflexion de $i(x,t)$, donc de $B(x,t)$ opposé à celui de $E(x,t)$.

III.5) Positionnement d'une plaque de métal parfait:

D'après I.5.b, pour annuler l'onde réfléchie, il faut placer, à la distance $x = e \frac{\pi}{4}$, une plaque de métal parfaitement conducteur. On peut le vérifier: sur le métal parfait, on a un noeud de champ électrique, donc en $x = e$ on a un noeud de champ magnétique (propriété des ondes stationnaires) et de ce fait en

$x = e$: $\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$; par ailleurs les deux premières relations de III.3 restent valables $\frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$; on en déduit $\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{\epsilon_0 c} \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{\epsilon_0 c}$ comme prévu.