



Діофант – одна з найважчих загадок в історії науки. Праці його подібні до сяючого вогню посеред повно непроникної пітьми.

І. Г. Башмакова

Історична довідка

Діофант Александрійський (лат. *Diophantus*)
давньогрецький математик, жив в III столітті в Александрії

Діофант Александрійський — найвідоміший алгебраїст грецького походження один з головних творців періоду відродження математичної науки між другою половиною III ст. н. е. та першою половиною IV.

Діофант працював в Александрії, місті, що в ті часи ще залишалось міжнародним центром математичних студій. Розквіт діяльності Діофанта припадав, імовірно, на період бл. 250 р. Про нього писав Теон Александрійський (близько 350 р.). Найвідомішою працею Діофанта є «Арифметика».

Історія майже нічого не зберегла про його життя. Тільки опосередковано вдалося встановити, коли приблизно він жив. А в популярному в X— XIV ст. збірнику віршованих арифметичних задач «Грецька антологія» вміщено задачу під назвою «Епітафія Діофанта» такого змісту:

Прах Діофанта гробниця ховає:

вдивися – і камінь мудрим мистецтвом розкриє покійного вік.

З волі богів шосту частину життя був він дитина,

А ще половину шостої – стрів із пушком на щоках.

Тільки минула сьома, з коханою він одружився.

З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.

Та півжиття свого тішився батько лиш сином:

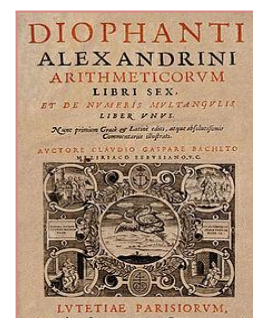
рано могила дитину у батька забрала.

Років двічі по два батько оплакував сина.

А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний...

Задача приводить до рівняння першого степеня, розв'язавши яке дізнаємося, що Діофант прожив 84 роки. Ось і всі відомості про його життя.

Ще більшою загадкою, ніж біографія Діофанта, стала для науки його «Арифметика», з тринадцяти книг якої збереглося лише шість. У них подано 189 задач з розв'язаннями і поясненнями. За формою «Арифметика» просто збірник задач, але за змістом – унікальне явище, справжнє чудо історії математики.





Латинський переклад

Арифметики (1621)

Теоретичні відомості та прикладні задачі з розв'язанням

Поняття про діофантові рівняння

Існує доволі велике коло практичних задач, у яких невідомі величини за своїм змістом можуть набувати лише цілочисельних значень. Розв'язування деяких з таких задач призводить до розв'язування рівнянь у цілих числах. Такі рівняння називаються діофантовими, на честь давньогрецького математика Діофанта Олександрійського.

Лінійним рівнянням з двома змінними називається рівняння виду $ax + by = c$, де x, y – змінні, a, b, c – числа, a та b одночасно не дорівнюють 0.

Діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння з цілими або раціональними коефіцієнтами, в яких вимагається визначити цілі або раціональні розв'язки. У діофантових рівняннях кількість невідомих більша за кількість рівнянь, тому їх ще називають невизначеними.

Наша задача полягає в тому, щоб навчитися знаходити цілі розв'язки рівняння з двома невідомими x і y з цілими коефіцієнтами a, b та c : $ax + by = c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, $\text{НСД}(|a||b||c|) = 1$.

Умова $a^2 + b^2 \neq 0$, означає, що хоча б один із коефіцієнтів не дорівнює 0.

Умова $\text{НСД}(|a||b||c|) = 1$ не звужує клас задач, які вивчаються, а лише упорядковує форму запису рівняння: коли коефіцієнти рівняння мають спільний дільник, що більше за 1, на нього завжди можна поділити обидві частини рівняння. Наявність у цій умові модулів дозволяє розв'язувати рівняння як із додатними так і з від'ємними коефіцієнтами.

Розглянемо лінійні діофантові рівняння з двома невідомими:

$$ax + by = c \quad (1), \text{ де } a, b, c - \text{цілі числа.}$$

Рівняння (1) описує пряму на координатній площині. Треба знайти всі точки з цілими координатами, що лежать на цій прямій. Кожен розв'язок рівняння – це пара цілих чисел.

Координати будь-якої з точок на цій прямій задовольняють умову (1). Отже, рівняння (1) завжди має безліч розв'язків. Але ми будемо знаходити лише цілі розв'язки. І відразу ж виникає запитання:



- 1) Чи існують взагалі цілі розв'язки діофантового рівняння (1)?
- 2) Якщо розв'язки існують, то скільки їх?

Відповідь на перше запитання пов'язане з наступним твердженням.

Теорема 1. *Для того, щоб діофантове рівняння мало розв'язок необхідно, щоб числа a і b були взаємно простими.*

Наприклад, рівняння $8x + 12y = 13$ не має розв'язків, бо $\text{НСД}(8; 12) = 4 > 1$.

Теорема 2. *Якщо коефіцієнти при невідомих у діофантовому рівнянні є взаємно простими числами, то це рівняння має безліч розв'язків.*

Отже, умова, щоб коефіцієнти при невідомих у діофантовому рівнянні були взаємно простими числами є необхідною і достатньою умовою для того, щоб це рівняння мало розв'язки.

Теорема 3. *Якщо рівняння (1) має частковий розв'язок $(x_0; y_0)$, то його загальний розв'язок має вигляд:*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt & \text{і} & & y &= y_0 - at, & t \in \mathbb{Z}, \text{ а також} \\ x &= x_0 - bt & \text{і} & & y &= y_0 + at, & t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Практичне значення цієї теореми полягає у тому, що інколи якийсь частковий розв'язок можна вгадати, тоді за допомогою теореми 3 можна зразу записати загальний розв'язок.

Коли ж вгадати чи підібрати частковий розв'язок неможливо або складно, тоді теорема 3 корисна для перевірки знайденого загального розв'язку. Справді, підставивши записані значення x і y у ліву частину рівняння (1), отримаємо:

$$a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + abt + by_0 - abt = ax_0 + by_0 = c.$$

Приклад 1. Знайти цілі розв'язки рівняння $5x + 7y = 19$;

Розв'язання.

Помічаємо, що якщо $x = 1$, а $y = 2$, то $5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 19$, отже, $(1; 2)$ – частинний розв'язок. Тоді за теоремою 3 можна зразу записати загальний розв'язок цього рівняння:

$$x = 1 + 7t; \quad y = 2 - 5t, \text{ де } t \in \mathbb{Z}.$$

Частинний розв'язок $(x_0; y_0)$ можна знайти вищевказаними способами для малих a і b , а у випадку коли числа a і b великі, то можна скористатися наступною теоремою.

Теорема 4. *$\text{НСД}(a; b) = d$ може бути записаний у вигляді $d = at + bn$, де t, n цілі числа.*



d знаходимо за алгоритмом Евкліда.

Сформульовані теореми дозволяють скласти наступний алгоритм розв'язання в цілих числах діофантового рівняння виду $ax + by = c$:

1. Знайти найбільший спільний дільник чисел a і b . Якщо $\text{НСД}(a; b) = d > 1$ і c не ділиться на d , то рівняння цілих розв'язків не має; якщо $\text{НСД}(a; b) = d > 1$ і $c \div d$, то розділити почленно рівняння на d , отримавши при цьому рівняння $a_1x + b_1y = c_1$, в якому $\text{НСД}(a_1; b_1) = 1$.
2. Знайти цілий розв'язок (x_0, y_0) рівняння шляхом подання одиниці як лінійної комбінації чисел a і b .
3. Скласти загальну формулу цілих розв'язків даного рівняння $x = x_0c + bt$, $y = y_0c - at$, де $(x_0; y_0)$ – цілий розв'язок рівняння, t – будь-яке ціле число.

Діофантове рівняння виду: $ax + by = 1$ – це найпростіше діофантове рівняння. Існують різні степені невизначених рівнянь і чим вищий степінь, тим складнішим є розв'язок рівняння. Ми розглянемо рівняння першого степеня двох видів:

$$1) ax + by = c,$$

$$2) ax + by + cz = d$$

Теорема 5. Якщо у рівнянні $ax + by = 1$, $\text{НСД}(a; b) = 1$, то рівняння має хоча б один розв'язок.

Теорема 6. Якщо у рівнянні $ax + by = c$, $\text{НСД}(a; b) = d > 1$ і c не ділиться на d , то рівняння цілих розв'язків не має.

Теорема 7. Якщо у рівнянні $ax + by = c$, $\text{НСД}(a; b) = d > 1$ і c ділиться на d , то воно рівносильне рівнянню $a_1x + b_1y = c_1$, у якому $\text{НСД}(a_1; b_1) = 1$.

Теорема 8. Лінійне діофантове рівняння $ax + by + cz = d$ має розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли d ділиться на $\text{НСД}(a, b, c)$.

Розв'язки рівняння знаходять за формулами $x = u_0 - mt + b_1k$; $y = v_0 - nt - a_1k$; $z = t$, де

$(u_0; v_0)$ – частинний розв'язок.

Розглянемо деякі способи розв'язування прикладних задач за допомогою діофантових рівнянь.

Для знаходження частинного розв'язку діофантового рівняння можна використовувати багато способів. Найпростіший з них – *метод перебору варіантів*.

Він зводиться до наступного алгоритму:

1. Виражаємо x через y , або y через x .
2. Надаємо початкові значення змінній, наприклад, $y = 0; 1; 2; 3; \dots$ і обчислюємо відповідні значення x .

В результаті перебору пар значень знайдеться пара таких цілих чисел

$$\begin{cases} x_0 = m, \\ y_0 = n \end{cases} \quad \text{– частинний розв'язок рівняння}$$

Розглянемо даний спосіб на прикладі.

Приклад 2. Скількома способами можна набрати суму 27 грн., маючи досить багато банкнот номіналом 2 грн. та 5 грн.?

Розв'язання.

Нехай x – кількість купюр по 2 грн., а y – кількість купюр по 5 грн. Задача зводиться до розв'язання рівняння $2x + 5y = 27$.

$$1. \quad y = \frac{27 - 2x}{5};$$

$$2. \quad x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.$$

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 5 \end{cases} \quad \text{– частинний розв'язок рівняння;}$$

$$\begin{cases} x_0 = 6, \\ y_0 = 3 \end{cases} \quad \text{– частинний розв'язок рівняння;}$$

$$\begin{cases} x_0 = 11, \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \text{– частинний розв'язок рівняння.}$$

Відповідь: 3 способи.



Як окремий метод розв'язування рівнянь за допомогою перебору варіантів можна виділити *метод розв'язування рівнянь шляхом виділення цілої частини*.

Приклад 3. Андрій працює влітку у кав'ярні. За кожну годину йому платять 20 грн. і вираховують 4 грн. за кожну розбиту тарілку. На минулому тижні він заробив 360 грн. Визначте, скільки годин він працював і скільки розбив тарілок, якщо відомо, що він працює не більше 3 годин на день.

Розв'язання.

Нехай хлопець працював всього x годин на тиждень, тоді йому заплатили $(20x)$ грн., але він розбив y тарілок, і з нього вираховували $(4y)$ грн.

Маємо рівняння $20x - 4y = 360$. Якщо поділити рівняння на 4 отримаємо рівняння

$$5x - y = 90;$$

$$5x = 90 + y;$$

$$x = 18 + \frac{y}{5}.$$

Так як x – ціле число, то y повинно без остачі ділитися на 5, щоб у правій частині вийшло ціле число. Це може бути при $y = 0; 5; 10; 15$.

Тому можливі чотири випадки:

$$y = 0, \quad x = 18;$$

$$y = 5, \quad x = 19;$$

$$y = 10, \quad x = 20;$$

$$y = 15, \quad x = 21.$$

Відповідь: працював 18 годин, розбив 0 тарілок;
працював 19 годин, розбив 5 тарілок;
працював 20 годин, розбив 10 тарілок;
працював 21 годину, розбив 15 тарілок.

Розв'яжемо **приклад 2** *шляхом виділення цілої частини*.

Приклад 4. Скількома способами можна набрати суму 27 грн., маючи досить багато банкнот номіналом 2 грн. та 5 грн.?

Розв'язання.



Задача зводиться до розв'язання рівняння $2x + 5y = 27$.

1. Виразимо x через y : $x = \frac{27 - 5y}{2}$;

2. Виділимо цілу частину виразу: $x = \frac{26 - 4y + 1 - y}{2}$; $x = 13 - 2y + \frac{1 - y}{2}$.

3. Щоб вираз був цілим, $\frac{1 - y}{2}$ повинно бути цілим і значення виразу $1 - y$ повинно бути кратним 2. Це виконується лише при непарних значеннях y :

при $y = 1$, $\begin{cases} x_0 = 11, \\ y_0 = 1 \end{cases}$ – частинний розв'язок рівняння;

при $y = 3$, $\begin{cases} x_0 = 6, \\ y_0 = 3 \end{cases}$ – частинний розв'язок рівняння;

при $y = 5$, $\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 5 \end{cases}$ – частинний розв'язок рівняння.

Відповідь: 3 способи.

Очевидно, що обидва ці методи розв'язання незручні у тому, що потребують перевірки всіх можливих значень x і y . До того ж ці методи незручні при розв'язуванні рівнянь з великими числовими коефіцієнтами.

Тому розглянемо ще один метод розв'язування рівнянь – *метод спуску, або метод подрібнення*.

Вперше цей метод застосував на початку VI століття індійський математик Аріабхатта. Цей метод полягає у поступовому зменшенні коефіцієнтів рівняння за допомогою виділення цілої частини виразу та введення нової цілої змінної.

Приклад 5. Треба розлити 3940 тон нафти в цистерни ємністю по 50 тон і 80 тон так, щоб всі використані цистерни були повними. Скільки цистерн тієї або іншої ємності буде потрібно?

Розв'язання.



Задача зводиться до розв'язання в цілих числах рівняння $50x + 80y = 3940$. Якщо поділити рівняння на 10, воно виглядатиме $5x + 8y = 394$.

1. Серед змінних оберемо змінну, що має найменший числовий коефіцієнт, і виразимо її

$$x = \frac{394 - 8y}{5}.$$

через іншу змінну:

$$x = 78 - y + \frac{4 - 3y}{5}.$$

Після цього виділимо цілу частину виразу:

Так як корені рівняння повинні бути цілими, то це може бути лише в тому випадку якщо цілим виявиться значення $\frac{4 - 3y}{5}$. Це можливо тоді, коли число $4 - 3y$ ділиться без остачі на 5. Введемо нову змінну z , та зведемо останнє рівняння до вигляду: $4 - 3y = 5z$.

Ми прийшли до рівняння такого ж типу як і початкове, але вже з меншими коефіцієнтами. Тепер його потрібно розв'язувати відносно змінних y і z . Виконуючи перетворення аналогічні попереднім отримаємо:

$$y = \frac{4 - 5z}{3} = 1 - z + \frac{1 - 2z}{3}.$$

2. Введемо нову змінну u , $1 - 2z = 3u$.

$$z = \frac{1 - 3u}{2} = \frac{1 - u}{2} - u.$$

3. Введемо нову змінну v , $1 - u = 2v$,

$$u = 1 - 2v.$$

Так як дробових виразів більше нема, можна сказати, що процес спуску завершено.

4. Тепер необхідно «піднятися нагору». Виражаємо через змінну v спочатку z , потім y і x .



$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1,$$

$$z = 3v - 1.$$

$$y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3-5v,$$

$$y = 3-5v.$$

$$x = \frac{394-8y}{5} = \frac{394-8(3-5v)}{5} = 74+8v,$$

$$x = 74+8v.$$

5. Формули $\begin{cases} x = 74 + 8v, & v \in \mathbb{Z}, \\ y = 3 - 5v, & v \in \mathbb{Z} \end{cases}$ становлять загальний розв'язок рівняння в цілих числах.

Враховуючи, що x і y натуральні, розв'язок буде єдиним: $\begin{cases} x = 74, \\ y = 3. \end{cases}$

Відповідь: Потрібно взяти 74 цистерни ємністю 50 тон і 3 цистерни ємністю 80 тон.

Приклад 6. Знайти цілі розв'язки рівняння $5x + 8y = 39$.

Розв'язання.

1. Серед змінних оберемо змінну, що має найменший числовий коефіцієнт, і виразимо її через іншу змінну: $x = \frac{39-8y}{5}$. Виділяємо цілу частину: $x = (7-y) + \frac{4-3y}{5}$, x буде цілим,

якщо вираз $\frac{4-3y}{5}$ виявиться цілим, а це можливо лише тоді коли число $4-3y$ без остачі ділиться на 5.

Введемо нову змінну z . В результаті одержимо рівняння $4-3y=5z$. Розв'язувати його будемо відносно змінної y : $y = \frac{4-5z}{3}$. Виділяємо цілу частину $y = 1-z + \frac{1-2z}{3}$, y буде

цілим, якщо вираз $\frac{1-2z}{3}$ виявиться цілим, а це можливо лише тоді коли число $1-2z$ без остачі ділиться на 3.

2. Вводимо нову змінну u : $3u = 1-2z$.



3. Виражаємо змінну z :
$$z = \frac{1-3u}{2} = \frac{1-u}{2} - u.$$

Оскільки $\frac{1-u}{2}$ має бути цілим, одержуємо: $1-u = 2v$, звідки $u = 1-2v$. Дробів більше немає, спуск закінчено.

4. Тепер необхідно «піднятися нагору». Виражаємо через змінну v спочатку z , потім y і змінну x :

$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1+2v = 3v-1; \quad y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3-5v;$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3+8v.$$

Формули $x = 3 + 8v$ і $y = 3 - 5v$, де v – ціле число, є загальними розв'язками рівняння.

Перевага цього метода в нескладному та логічному математичному алгоритмі, що дозволяє розв'язувати лінійні діофантові рівняння з великими числовими коефіцієнтами шляхом поступового їх зменшення.

Задачі до даної теми

- 1¹. Знайти цілі розв'язки рівняння $3x + 7y = 14$.
- 2¹. Знайти множину всіх пар натуральних чисел, які є розв'язками рівняння: $49x + 51y = 602$.
- 3¹. Цукерки масою 13 кг розклали в коробки по 3 кг і по 5 кг. Яка найменша кількість коробок знадобиться ?
- 4¹. Знайти два цілих числа, щоб різниця добутків першого на 19 і другого на 8 дорівнювала 13.
- 5¹. У клітці сидять кролі і фазани, всього у них 18 лап. Скільки в клітці кролів і скільки фазанів?
- 6¹. Для перевезення великої кількості контейнерів по 170 кг і по 190 кг виділили тритонні машини. Чи можна ними завантажувати машини повністю?
- 7¹. Тетянка купила альбом за 19 грн., але у неї були лише купюри по 3 грн., а в касі — купюри по 5 грн. Чи можливо за наявності таких купюр розрахуватися з касиром і як це зробити?



8¹. У клітці сидять кури і кролі, всього у них 20 лап. Скільки там може бути курей і скільки кролів?

1². Знайти цілі розв'язки рівняння $3x + 5y = 7$.

2². В акваріумі живуть восьминіжки і морські зірки. У восьминіжок 8 ніжок, а у морських зірок по 5 ніжок. Всього ніжок 39. Скільки в акваріумі восьминіжок і зірок разом?

3². У клітці сидять кролі і фазани, всього у них 62 лапи. Скільки в клітці кролів і скільки фазанів?

4². Скільки необхідно взяти відрізків довжиною 7 см і скільки відрізків довжиною 12 см, щоб скласти один відрізок довжиною 1 м?

1³. Знайти цілі розв'язки рівняння $35x - 2004y = 11$.

2³. Чи можна виплатити 100 гривень сорока купюрами вартістю 1, 10 і 100 гривень?

3³. Піддані привезли в подарунок шаху 300 дорогоцінних камінців: у маленьких шкатулка по 15 камінців в кожній і у великих – по 40 камінців. Скільки було великих і маленьких шкатулок, якщо відомо, що маленьких було менше ніж великих.

4³. Зобразити число 100 у вигляді суми двох чисел так, щоб одне з них ділилося на 7, а друге на 11.

5³. Сашкові треба купити 40 зошитів, ціна яких 1 грн., 4 грн., 12 грн. Скільки зошитів кожного виду може купити Сашко, якщо у нього є 100 грн.?

5⁴. Вік людини в 1973 році дорівнює сумі цифр її року народження. Скільки їй років?

6⁴. Вік студента в 1977 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років було студенту?

1⁴. Фірма продавала чай в центрі міста по 7 грн., а каву по 10 грн. за склянку, на вокзалі по 4 грн. і по 9 грн., відповідно. Всього продали за годину 20 склянок чаю і 20 склянок кави, при цьому торгували в центрі і на вокзалі порівну. Скільки склянок кави продали в центрі?

2⁴. Знайти всі пари натуральних чисел, які задовольняють умови: $11x - 6y = z$, $z - y = 7$, $x \leq 20$.

**Список рекомендованої літератури
до підготовки з даної теми:**



1. Конфорович А.І. Колумби математики / Конфорович А.І. – Київ: Радянська школа, 1982. – 61с.
2. Мартин Гарднер. Крестики нолики / Гарднер М. – Москва: Мир, 1983. – 23с.
3. Перельман Я.И. Занимательная алгебра / Перельман Я.И. – Москва: Наука, 1978. – 100с.
4. У світі математики. Випуск 16: [збірник науково – популярних статей]. – Київ: Радянська школа, 1985. – 58 с.
5. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / Башмакова И.Г. – Москва: Наука, 1972. – 68 с.
6. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. Популярные лекции по математике / Гельфонд А.О. – Москва: Наука, 1978. – 9 с.
7. Шатилова А.В. Сказки Шехерезады и уравнения Диофанта (элективный курс). Балашов, 2009. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [wiki.soiro.ru/images / ПособиеДиофант.doc](http://wiki.soiro.ru/images/PособиеДиофант.doc)
8. Диофантовы уравнения первого порядка. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lazareva.hol.es/Diofantovy_uravneniya.pdf
9. Агеенко А., Назаренко В., Чараева З. Сборник задач, приводящих к решению линейных уравнений с двумя переменными. – Нефтеюганск: 2009. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: portfem.narod.ru/DswMedia/sbornikzadachdiafant.docx
10. Діофантові рівняння. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.nnstr.com/Books/book2/book4_2.pdf
11. Возможности теории линейных диофантовых уравнений. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: Загружено с сайта автора: <http://mech.math.msu.su/~falin>.