

PHYSIQUE

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES ENERGETIQUES

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}_{\text{sortant}} dS(M)$$

I-1) définition :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{intérieure à } \Sigma}}{\epsilon_0}$$

Théorème de Gauss :

Pour un dipôle : $Q_{\text{intérieure à } \Sigma} = 0$ et, donc : $\Phi = 0$

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

I-2) définition :

Le champ électrostatique est à circulation conservative : $C = 0$

II-1) Théorème de Gauss pour la gravitation (basé sur l'analogie loi de Coulomb/loi de Newton) :

$$\Phi = -4\pi K M_{\text{intérieure à } \Sigma}$$

II-2) De même que le champ électrostatique, le champ gravitationnel est à circulation conservative : $C = 0$ III-1) définition : l'énergie potentielle électrostatique $W_{\text{pot}}(M)$ est le travail minimal que l'extérieur doit fournir à la charge pour l'amener depuis l'infini (où le potentiel électrostatique est supposé nul) jusqu'au point considéré

Calcul :

$$W_{\text{pot}}(M) = \int_{P=\infty}^{P=M} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow q}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} -\vec{F}_{\text{els}}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} -q\vec{E}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} qdV(P) = qV(M) - qV(\infty) = qV(M)$$

III-2) définition : l'énergie potentielle gravitationnelle $W'_{\text{pot}}(M)$ est le travail minimal que l'extérieur doit fournir à la masse pour l'amener depuis l'infini (où le potentiel gravitationnel est supposé nul) jusqu'au point considéré

Calcul :

$$W'_{\text{pot}}(M) = \int_{P=\infty}^{P=M} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow q}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} -\vec{F}_{\text{gravit}}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} -m\vec{G}(P) \cdot d\vec{P} = \int_{P=\infty}^{P=M} mdU(P) = mU(M) - mU(\infty) = m$$

III-3) Le travail élémentaire $\delta T(M)$ de la force $\vec{F} = -k' \vec{OM}$ lorsque M se déplace de $d\vec{M}$ est :

$$\delta T(M) = \vec{F} \cdot d\vec{M} = -k' \vec{OM} \cdot d\vec{M} = -d \left(\frac{1}{2} k' (\vec{OM})^2 \right)$$

La force $\vec{F} = -k' \vec{OM}$ dérive donc de l'énergie potentielle $E_{\text{pot}}(M) = \frac{1}{2} k' (\vec{OM})^2$ (à une constante additive arbitraire près)

IV) ETUDE ENERGETIQUE D'UN CONDENSATEUR :

IV-1) $q_{\infty} = \int_{t'=0}^{t'=\infty} i(t') dt'$: q_{∞} est l'aire sous la courbe $i(t)$; en assimilant grossièrement cette aire à celle du triangle de sommets (0;0), (60;0), (0;2), on obtient : $q_{\infty} = 6,0 \mu C$

IV-2) $E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$; donc : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$

dont la solution générale est : $q(t) = CE + K \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec : $\tau = RC$
K est déterminé par la continuité de $u(t)$, donc de $q(t)$ à $t=0$: $K = -CE$

D'où : $q(t) = CE \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$

On en déduit : $q_{\infty} = CE = 6,0 \mu C$

On retrouve bien l'ordre de grandeur obtenu à la question IV-1)

IV-3) $W_{\text{cond}}(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} u(t') \cdot i(t') dt' = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{q(t')}{C} \cdot dq = \left[\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right]_{t'=0}^{t'=t}$

Donc : $W_{\text{cond},\infty} = \left[\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right]_{t'=0}^{t'=\infty} = \frac{1}{2} \frac{q_{\infty}^2}{C}$

IV-4) $W_{\text{gén}}(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} E \cdot i(t') dt' = E \int_{t'=0}^{t'=t} dq = E(q(t) - 0) = Eq(t)$

Donc : $W_{\text{gén},\infty} = CE^2$

IV-5) Le générateur fournit deux fois plus d'énergie que n'en récupère le condensateur : la moitié de l'énergie fournie par le générateur a été perdue par effet Joule dans la résistance

V) ETUDE THERMODYNAMIQUE D'UN CONDENSATEUR :

V-1)

a) $\delta W_{\text{rév}} = - P.dV$

b) $dU = \delta Q_{\text{rév}} + \delta W_{\text{rév}} = c_p dT + k dP - P dV$

c) $H = U + PV$

Donc : $dH = dU + P dV + V dP$ (1)

Et, d'après l'expression de dU obtenue : $dH = c_p dT + k dP + V dP = c_p dT + (k+V) dP$

d) $dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = \frac{c_p}{T} dT + \frac{k}{T} dP$ (2)

en écrivant que dH et dS sont des différentielles totales exactes :

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\left(\frac{\partial \left(\frac{c_p}{T} \right)}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{k}{T} \right)}{\partial T} \right)_P$$

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\text{donc :} \quad \frac{1}{T} \left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_P - \frac{k}{T^2} \quad \text{et :} \quad \left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_P - \frac{k}{T}$$

$$\text{puis, par soustraction membre à membre :} \quad k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (3)$$

$$\text{alors, en dérivant par rapport à T, à P constante, l'équation d'état :} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \alpha V_0$$

on obtient alors, par report dans (3) : $k = -T \alpha V_0$

e-1) $\delta W_{\text{rév}} = - P.dV$

or : par différentiation de l'équation d'état, à T = constante, on obtient : $dV = - \chi_T V_0 dP$

donc : $\delta W_{\text{rév}} = + \chi_T V_0 P dP$

$$W_0 = \int_{P_i}^{P_f} \chi_T V_0 P dP = \frac{1}{2} \chi_T V_0 (P_f^2 - P_i^2)$$

et, par intégration :

AN : $W_0 = 11 \text{ J}$

e-2) à température T constante : $\delta Q_{\text{rév}} = k dP = - T \alpha V_0 dP$

$$Q_0 = \int_{P_i}^{P_f} - T \alpha V_0 dP = T \alpha V_0 (P_i - P_f)$$

donc :

AN : $Q_0 = - 326,75 \text{ J}$

e-3) $\Delta U = W_0 + Q_0 = - 315,7 \text{ J}$

e-4) $Q_0 < 0$: le diélectrique a donc cédé de la chaleur à l'extérieur : le calorimètre étant

thermiquement isolé, cette chaleur a donc fait fondre une masse m de glace telle que : $m = \frac{-Q_0}{L_f}$

AN : $m = 0,975 \text{ g}$

V-2) a) $q = \epsilon_r(T, P) C_0 U_{\text{elec}}$

$$\begin{aligned} b) dG_1 &= dU + PdV + VdP - TdS - SdT - qdU_{\text{elec}} - U_{\text{elec}}dq \\ &= \delta Q_{\text{rév}} + \delta W_{\text{rév}} + PdV + VdP - TdS - SdT - qdU_{\text{elec}} - U_{\text{elec}}dq \\ &= TdS - PdV + U_{\text{elec}}dq + PdV + VdP - TdS - SdT - qdU_{\text{elec}} - U_{\text{elec}}dq \end{aligned}$$

donc : $dG_1 = - SdT + VdP - qdU_{\text{elec}}$

G_1 est l'enthalpie libre généralisée du système

c) on lit sur l'expression de dG_1 que : $-S = \left(\frac{\partial G_1}{\partial T} \right)_{P, U_{\text{elec}}}$

$$\left(\frac{\partial \left(\frac{\partial G_1}{\partial T} \right)_{P, U_{\text{elec}}}}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T, P} = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T, P}}{\partial T} \right)_{P, U_{\text{elec}}}$$

le théorème de Schwarz permet alors d'écrire que :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} = - \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P}}{\partial T} \right)_{P,U_{\text{elec}}}$$

c'est-à-dire:

$$\text{or, d'après (4) : } \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} = -q$$

$$\text{donc : } \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} = -\epsilon_r(T,P) C_0 U_{\text{elec}}$$

$$\text{puis : } \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P}}{\partial T} \right)_{P,U_{\text{elec}}} = - \left(\frac{\partial (\epsilon_r(T,P) C_0 U_{\text{elec}})}{\partial T} \right)_{P,U_{\text{elec}}} = -C_0 U_{\text{elec}} \left(\frac{\partial \epsilon_r(T,P)}{\partial T} \right)_P$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} = - \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial G_1}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P}}{\partial T} \right)_{P,U_{\text{elec}}} = +C_0 U_{\text{elec}} \left(\frac{\partial \epsilon_r(T,P)}{\partial T} \right)_P$$

d'où, enfin :

$$\text{d-1) } Q = Q_{\text{rév}} = \int_i^f T dS = \int_i^f T \left(\frac{\partial S}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} dU_{\text{elec}} = \int_i^f T C_0 U_{\text{elec}} \left(\frac{\partial \epsilon_r(T,P)}{\partial T} \right)_P dU_{\text{elec}}$$

$$Q = T C_0 \left(\frac{\partial \epsilon_r(T,P)}{\partial T} \right)_P \int_0^{U_{\text{elec},f}} U_{\text{elec}} dU_{\text{elec}}$$

$$Q = \frac{1}{2} T C_0 \left(\frac{\partial \epsilon_r(T,P)}{\partial T} \right)_P U_{\text{elec},f}^2$$

$$\text{d-2) AN : } Q = -3,75 \text{ J}$$

$$\text{d-3) } V_f - V_i = \int_i^f dV = \int_0^{U_{\text{elec},f}} \left(\frac{\partial V}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} dU_{\text{elec}}$$

or, en utilisant de nouveau le théorème de Schwarz pour la fonction G_1 , mais cette fois pour les variables U_{elec} et P , on obtient :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial U_{\text{elec}}} \right)_{T,P} = \left(\frac{\partial(-q)}{\partial P} \right)_{T,U_{\text{elec}}} = - \left(\frac{\partial(\epsilon_r(T,P) C_0 U_{\text{elec}})}{\partial P} \right)_{T,U_{\text{elec}}} = -C_0 U_{\text{elec}} \left(\frac{\partial(\epsilon_r(T,P))}{\partial P} \right)_T$$

donc :

$$V_f - V_i = \int_0^{U_{\text{elec},f}} -C_0 U_{\text{elec}} \left(\frac{\partial(\epsilon_r(T,P))}{\partial P} \right)_T dU_{\text{elec}} = -\frac{1}{2} C_0 \left(\frac{\partial(\epsilon_r(T,P))}{\partial P} \right)_T U_{\text{elec}}^2$$

d-4) AN :

$$V_f - V_i = -\frac{1,5\chi_T}{2} C_0 U_{\text{elec},f}^2 = -7,6 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

c'est le phénomène d'électrostriction