Epreuve de physique II - Concours Mines-Ponts 2008

– Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et `a poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené `a prendre.
– Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériquement) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. La barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

ASCENSION ATMOSPHERIQUE EN MONTGOLFIERE

Les vecteurs sont notés en caractères gras, et leur norme en italique : Le vecteur **v** a pour norme v.
Les valeurs des constantes physiques utiles dans les applications numériques sont données à la fin du texte.
Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical.
Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e, sa pression P, sa température T et sa masse volumique μ. On désigne par P_o, T_o et μ_o les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où $z = 0$).

La partie III est indépendante des deux premières.

I. —Atmosphère en équilibre

I.A.—Atmosphère isotherme

On s'intéresse `a l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme T_o. On prendra $T_o = 288$ K.

1 — Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P, R, T_o et M_e.

2— Ecrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_o, de la hauteur barométrique $H = RT_o/(M_e g)$ et de l'altitude z.

3 — En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en O_2 et de 80% en N_2, calculer la valeur numérique de H. A quelle altitude $z_{50\%}^{iso}$ la pression est elle égale à $P_o/2$?

LB. — Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type $T = T_0 (1 - \alpha z)$ où $\alpha = 1/z_0$ est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en z/z_0 d'une expression plus précise. La valeur expérimentale $z_0 \approx 33$ km justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

4 — Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^{\beta}$ et $\mu(z) = \mu_0 (1 - \alpha z)^{\beta - 1}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H et de z_0.

5 — À quelle altitude $z_{50\%}^{iso}$ la pression est-elle égale à $P_0/2$? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible ?

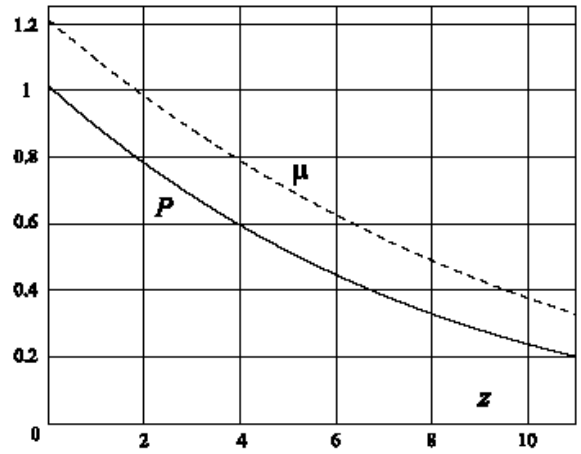


Figure 1

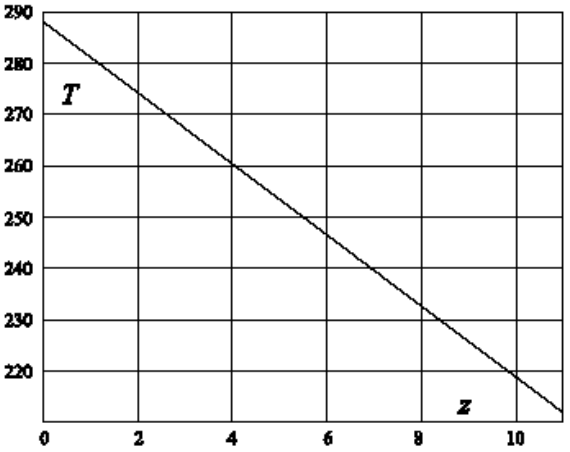


Figure 2

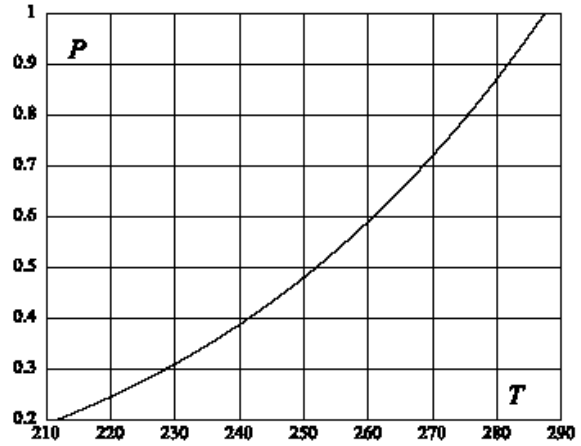


Figure 3

6 — Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les figures 1,2 et 3. La pression est donnée en 10^5 Pa, la température en K, la densité en $kg.m^{-3}$ et l'altitude en km. Un ajustement a moindres carrés de ces données permet d'obtenir els relations :

$$T = 288{,}14 - 6{,}94\ z$$

$$P = 1{,}01\ (T/288{,}08)^{5{,}26}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

Dans toute la suite du problème, on utilisera des valeurs numériques suivantes : $T_0 = 288$ K, $P_0 = 1013$ hPa, $\beta = 5$ et $z_0 = 40$ km, soit $\alpha = 2{,}5 \times 10^{-5}\ m^{-1}$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Ascension de la montgolfière

Une montgolfière standard reste à des altitudes raisonnables pour des questions évidentes de raréfaction en dioxygène. Le modèle polytropique des basses altitudes est donc bien adapté pour décrire son environnement atmosphérique, nous l'utiliserons désormais.

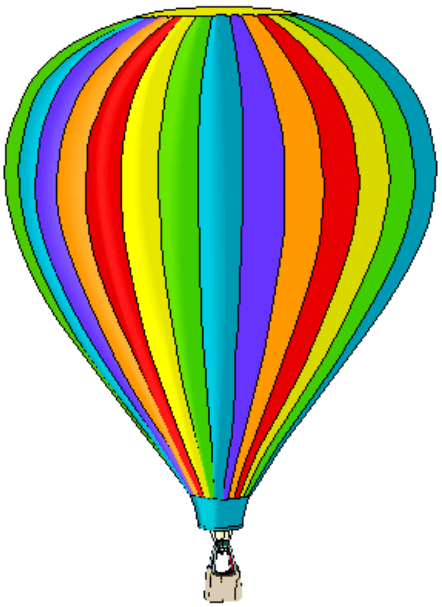


Figure 4 - La montgolfière

La pression, la masse volumique et la température de l'atmosphère à l'altitude z seront notées respectivement Pe, μ_e et T_e. La montgolfière est constituée d'une enveloppe ouverte de volume intérieur V_0 = 2000 m^3 et d'une nacelle (voir Fig. 4). La masse totale de l'enveloppe, de la nacelle et des passagers est notée m. On prendra m = 500 kg ; le volume propre de ces différents éléments est négligeable. Le volume intérieur à l'enveloppe est constant, mais la masse m_i de l'air chaud emprisonné à l'intérieur de cette enveloppe est variable. La masse de l'ensemble est donc $m + m_i$. On suppose qu'à l'intérieur de l'enveloppe, la température T_i et la pression P_i sont uniformes. L'ouverture inférieure de l'enveloppe permet de réaliser en permanence l'équilibre de pression entre l'air froid extérieur et l'air chaud intérieur. On suppose enfin que les gaz de combustion n'affectent pas la masse molaire M_e.

II.A. — Équilibre de la montgolfière

7 — Exprimer la masse m_i de l'air chaud dans l'enveloppe en fonction de P_e, V_0, M_e, et RT_i puis en fonction de μ_e, V_0, T_e, etT_i.

8 — À l'équilibre mécanique, la poussée d'Archimède compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient. Trouver la relation qui permet alors d'exprimer m en fonction de m_i, T_e et T_i.

9 — On note z_m l'altitude où la poussée d'Archimède exercée par l'air compense le poids mg. Exprimer z_m en fonction de α, β, m, μ_0 et V_0. Calculer la valeur numérique de z_m.

10 — On note T_d la valeur minimale de la température T_i permettant le décollage de la montgolfière. Etablir la relation, très simple, liant $m/(\mu_0 V_0)$ à 1 - To/T_i. Calculer la valeur numérique de T_d.

11 — Etablir la condition d'équilibre de la montgolfière :

$$P_e\left(\frac{1}{T_e}-\frac{1}{T_i}\right)=\kappa_1\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_d}\right)$$

où κ_1 est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème. En déduire la relation, notée $[E_1]$ donnant à l'équilibre $\delta T_i/T_i$ en fonction de $\delta T_e/T_e$, $\delta P_e/P_e$ et de T_i/T_e.

12 — En utilisant les grandeurs réduites $Z = \alpha z$, $Z_m = \alpha z_m$ et $\theta_i = T_i/T_0$, montrer que la condition d'équilibre de la question 8 s'écrit :

$$(1-Z)^{\beta-1}=\frac{m}{\mu_0 V_0}+\frac{(1-Z)^{\beta}}{\theta_i}$$

en utilisant à présent l'expression de z_m obtenue à la question 9, déduire l'expression de la fonction $Z \mapsto \theta_i(Z)$ en fonction des paramètres β et Z_m. On admet que le signe de $\theta_i'(0)=\left.\frac{d\theta_i}{dZ}\right|_{Z=0}$ est le même que celui de $\frac{\beta m}{\mu_0 V_0}-1$. Tracer rapidement l'allure de la courbe représentative de $\theta_i(Z)$ selon les valeurs de $\beta m/\mu_0 V$. En considérant la phase de descente, expliquer pourquoi une montgolfière satisfaisant la condition $\beta m < \mu_0 V$ fait courir le risque d'un écrasement au sol.

13 — Calculer la valeur numérique V_{max} du volume de l'enveloppe permettant de satisfaire la condition $\theta_i'(0) > 0$. Pour une valeur T_{max} = 373 K de la température maximale acceptable pour une mongolfière, calculer la valeur minimale V_{min} du volume de l'enveloppe qui permet le décollage. Calculer les valeurs de z_m associées à V_{min} et V_{max}-

II.B. — Ascension par apport thermique

Pour faire monter la montgolfière, l'aéronaute dispose d'un brûleur, qui permet d'apporter à l'air intérieur une petite «quantité de chaleur» δQ. La transformation subie par cet air est isobare et suffisamment rapide pour que la montgolfière n'ait pas le temps de changer d'altitude pendant cet apport de chaleur. Dans ces conditions, le système peut être considéré comme fermé.

Les capacités calorifiques molaires à pression et volume constants de l'air sont notées C_p et C_v avec $\gamma = Cp/C_v$. Elles ne dépendent pas de la température.

La montgolfière est en équilibre à l'altitude z, où l'air extérieur est à la pression P_e et à la températureT_e.

14 — Déterminer la variation de température $\delta T_i^{(1)}$ associée à l'apport thermique, on l'exprimera en fonction de $n_i = P_eV_0/(RT_i)$, C_p et δQ. En déduire $\delta T_i^{(1)} / T_i$ en fonction de γ, δQ, P_e et V_0.

15 — Exprimer la variation de la masse d'air $\delta m_i^{(1)}$ ' en fonction de M_e, δQ, C_p et T_i.
L'ascension de la montgolfière s'effectue lentement, sans autre échange thermique. L'air qui ne quitte pas l'enveloppe lors de la variation d'altitude δz subit une détente adiabatique réversible.

16 — La pression extérieure est toujours régie par la loi polytropique établie à la question 4. Déterminer la variation de température $\delta T_i^{(2)}$ de l'air intérieur à l'enveloppe pendant cette ascension, on l'exprimera en fonction de α, β, γ, T_i, z et δz. On vérifiera que $\delta T_i^{(2)}$ est négatif.

17 — La température extérieure est toujours régie par la loi linéaire de la partie I.B. Exprimer $\delta T_i^{(2)} / T_i$ en fonction de β, γ, T_e, et δT_e.

La variation de la température interne à l'enveloppe associée à l'apport thermique et à l'élévation de δz est $\delta T_i = \delta T_i^{(1)} + \delta T_i^{(2)}$.

18 — Déterminer la relation très simple entre $\delta P_e/P_e$ et $\delta T_e/T_e$ puis, en utilisant la relation *[E_1]* de la question 11, établir la relation :

$$[\frac{\beta}{\gamma} - (\beta - 1)\frac{T_i}{T_e}]\frac{\delta T_e}{T_e} = \kappa_2 \frac{\delta Q}{P_e V_0}$$

où κ_2 est une constante que l'on exprimera en fonction de γ.

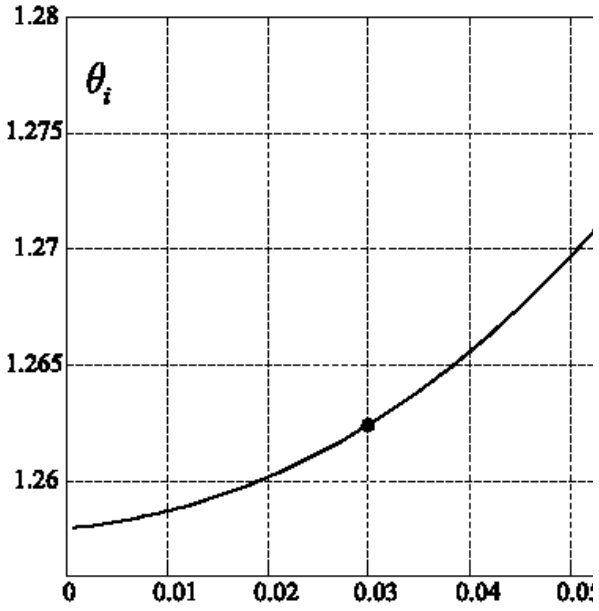


Figure 5 - Diagramme (θ_i, Z)

19 — La Figure 5 représente le diagramme (θ,Z) pour β = 5, m = 500 kg et V_0 = 2000 m^3. La situation initiale, avant apport thermique, est représentée par le point noir. Placer sur ce diagramme, reproduit grossièrement dans votre copie, les points représentatifs des transformations conduisant aux variations $\delta T^{(1)}$ et $\delta T^{(2)}$ de la température de l'air dans l'enveloppe lors de la montée.

C. — Descente par apport d'air froid

Pour faire descendre la montgolfière, l'aéronaute dispose d'une trappe qui permet de laisser l'air chaud s'échapper. Une petite quantité d'air froid, de volume *ô V* et de température initiale T_e, est admise dans l'enveloppe et remplace le volume correspondant d'air chaud. La montgolfière n'a pas le temps de changer d'altitude pendant rétablissement de l'équilibre thermique. Toutes ces transformations se font à la pression atmosphérique extérieure P_e. Le mélange d'air chaud *(n* moles à la température initiale T_i) et d'air froid *(δn* moles) s'effectue sans variation d'énergie interne.

20 — Montrer qu'à l'équilibre, la variation de température $\hat{o}T^{(3)}$de l'air intérieur à l'enveloppe vérifie, après rentrée d'air froid, la relation :

$$\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = f(T_i, T_e)\frac{\delta V}{V_0}$$

où *f* est une fonction simple dont on précisera l'expression.

21 — La descente de la montgolfière s'effectue lentement, sans échange de chaleur supplémentaire. L'expression de $\delta T_i^{(2)}/T_i$ établie à la question 17 est toujours valable. La variation de température interne pendant la descente est maintenant $\delta T_i = \delta T_i^{(3)} + \delta T_i^{(2)}$. En procédant comme à la question 18, relier $\delta T_i/T_i$ *à* $\delta T_e/T_e$, pour en déduire $\delta T_e/T_e$ en fonction de δV/V,T_i, T_e,, *β et γ.*

22 — En utilisant le même point de départ, placer sur le diagramme de la Figure 5, reproduit grossièrement dans votre copie, les points représentatifs des transformations conduisant aux variations $\delta T_i^{(3)}$ *et* $\delta T_i^{(2)}$ de la température de l'air dans l'enveloppe lors de la descente.

FIN DE LA PARTIE II

III — Forme de l'enveloppe de la montgolfière

La nacelle de la montgolfière est maintenue par *N* filins qui enserrent l'enveloppe et forment des méridiens régulièrement espacés de l'angle *2π/N.* L'enveloppe possède la symétrie de révolution autour de l'axe vertical

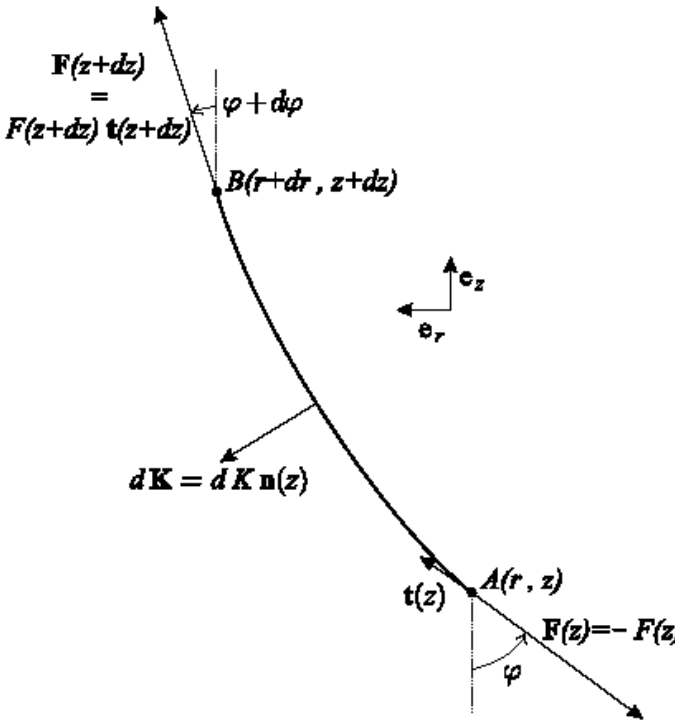


Figure 6 - Représentation des forces s'exerçant sur une longueur élémentaire $d\ell = AB$ du filin

l'enveloppe et *r* le rayon de cette enveloppe à la cote z. Les axes portant z et r ont pour vecteurs unitaires $\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}_r$. On considère aussi les vecteurs unitaires **t**(z) et **n**(z) tangent et normal au filin au point de cote z. La condition d'équilibre d'un élément de surface de l'enveloppe détermine sa forme, c'est-à-dire la relation r(z). Cette condition relie la tension des filins F à la force de force de pression K. On néglige l'action du champ de pesanteur sur l'enveloppe et les filins. On suppose que les pressions de l'air à l'intérieur, $P_i(z)$, et à l'extérieur, $P_e(z)$, de l'enveloppe sont des fonctions linéaires de z, telles que $P_i(0) = P_e(0)$. Les masses volumiques interne μ_i et externe μ_e sont quant à elles supposées uniformes. La figure 6 indique les forces agissant sur un élément de filin de longueur *dl=AB*. L'élément de surface associé, entre 2 méridiens, est $dS = 2\pi r\, dl/N$ avec $dl^2 = dr^2+dz^2$.

On nomme *z* la cote des points situes au-dessus de l'ouverture inférieure de

23 — Justifiez et commentez l'hypothèse de linéarité des pressions. Exprimer, en fonction de *g*, μ_i, μ_e et de la cote z, la différence des pressions ΔP(z) qui gonfle l'enveloppe.

24 — Ecrire la condition d'équilibre de l'élément de filin de longueur *dl* sous la forme d'une relation [E_2] entre $\frac{d[F(z)\vec{t}]}{dz}$ et $\frac{dK}{dz}\vec{n}(z)$. En déduire que le module *F* de la force **F** de tension des filins est constant sur toute leur longueur.

25 — Exprimer les composantes de la force de pression $d\boldsymbol{K}'$ appliquée à un élément de surface de l'enveloppe compris entre deux filins consécutifs et les parallèles de cotes z et z+ *dz*. Quelle relation existe-t-il entre $d\boldsymbol{K}$ et $d\boldsymbol{K}'$?

26 — En écrivant la relation [E2] de la question 24 dans la base ($\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_r$), établir une relation entre F, $\frac{d\varphi}{dz}$ et $\frac{dK}{dz}$.

27 — En considérant la relation entre $\frac{dr}{dz}$ et l'angle φ, montrer que l'équation différentielle vérifiée par les points de l'enveloppe peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -Arz[1+(\frac{dr}{dz})^2]^{3/2}$$

où A est une constante , dont on donnera l'expression et dont on précisera la dimension.

28 — En effectuant le changement de variable z —> $A^k x$ et le changement de fonction *r* —> $A^k y$, montrer que l'on peut trouver une valeur pour le réel *k* qui permet d'obtenir une équation différentielle *[E_3]* indépendante des caractéristiques de la montgolfière considérée dans le cadre des hypothèses de ce problème.

29 — La Figure 7 indique l'allure de plusieurs solutions de l'équation [E_3]. Ces solutions sont telles que *y(0) = 0.1* et possèdent des valeurs de y'(0) distinctes. La Figure 8 est la représentation graphique de 2 solutions :y_+ telle que $y_+(0) = 0{,}1$ et $y'_+(0) = 1{,}12$; y_ telle que y_(0) = -0,1 et y'_(0) = - 1,12. Commentez ces diverses figures.

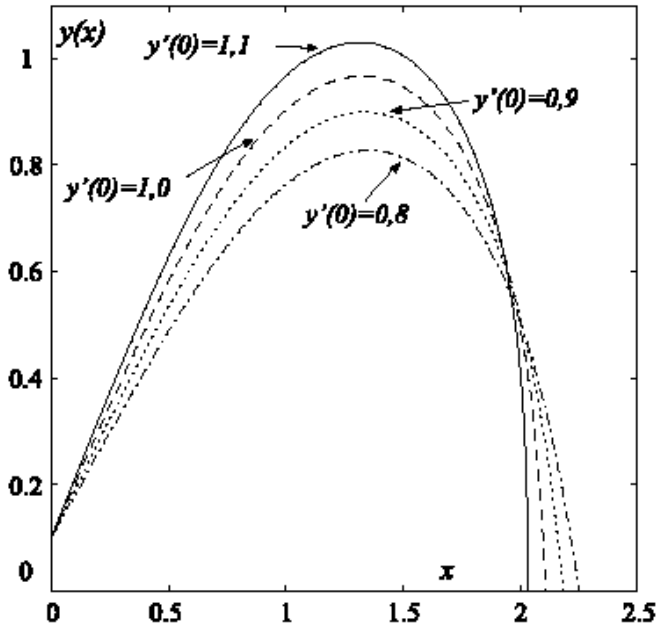


Figure 7

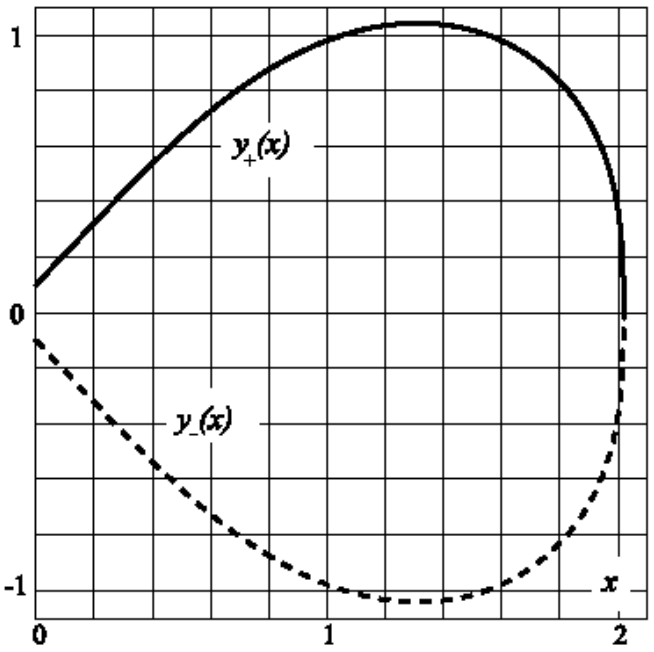


Figure 8

FIN DE LA PARTIE III

Valeurs numériques utiles

Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1},
Accélération de la gravité à la surface de la Terre : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Masse atomique de l'oxygène : $M_o = 16 \times 10^{-3}$kg.mol^{-1}
Masse atomique de l'azote : $M_N = 14 \times 10^{-3}$kg.mol^{-1}

FIN DE L'ÉPREUVE