



Chapitre 01 Suites numériques

I. Suites arithmétiques

1. Rappels

Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : -2, 5 et 12. Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique ? Pour y répondre, il faut s'assurer que la différence entre deux termes consécutifs reste la même.

$$12 - 5 = 7 \quad 5 - (-2) = 7$$

Cette différence reste égale à 7. -2, 5 et 12 sont bien les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 7.

Si on note (u_n) cette suite, on a $u_{n+1} = u_n + 7$

Rappel

Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/pHq6oClOyIU>

Forme explicite d'une suite arithmétique

Méthode

Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

 **Vidéo** <https://youtu.be/600KhPMHvBA>

 **Vidéo** <https://youtu.be/R3sHNwOb02M>

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive. Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3000 m. Au « jour 1 », il court 3150 m. Au « jour 2 », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille. On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

1. Calculer u_3 et u_4 .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
4. Donner la variation de la suite (u_n) .
5. Exprimer u_n en fonction de n .

Solution

1. $u_0 = 3\,000$ $u_1 = 3\,150$ $u_2 = 3\,300$ $u_3 = 3\,450$ $u_4 = 3\,600$
2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3\,000$ et de raison $r = 150$. On parle ici de **croissance linéaire**.
3. Soit n un entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 150$
4. $r = 150 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
5. Après 1 jour, il parcourt $u_1 = 3\,000 + 150 \times 1$
Après 2 jours, il parcourt $u_2 = 3\,000 + 150 \times 2$
Après 3 jours, il parcourt $u_3 = 3\,000 + 150 \times 3$
De manière générale, après n jours, il parcourt $u_n = 3\,000 + 150n$

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , on peut affirmer que

$$u_n = u_0 + nr \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$$

2. Somme des termes d'une suite arithmétique

Méthode

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

 Vidéo <https://youtu.be/q9kcwb6f4Bw>

On reprend le contexte de la méthode du paragraphe 1.

1. Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** lorsqu'il sera au « jour 15 » de son entraînement ?

2. Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** entre le « jour 8 » et le « jour 12 » ?

Solution

1. La distance parcourue au total au « jour 15 » d'entraînement est

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$$

Propriété

La somme S des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Ainsi

$$S = 16 \times \frac{u_0 + u_{15}}{2} = 16 \times \frac{3\,000 + 3\,000 + 150 \times 15}{2} = 16 \times \frac{8\,250}{2} = 66\,000$$

Pour vérifier, on peut utiliser la calculatrice.

Sur TI

- Pour accéder au catalogue : « 2^{nde} » puis « 0 ».
- Appuyer sur « ln » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir « som(» ou « somme(» ou « sum(» (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « suite(» ou « seq(» (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher **som(suite(3000+150X,X,0,15))**

Sur Casio

- Pour accéder au catalogue : « SHIFT » puis « 4 ».
- Appuyer sur « X » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir $\Sigma($
- Et compléter pour afficher $\sum_{X=0}^{15} (3000+150X)$

La calculatrice affiche 66 000. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 66 000 m soit 66 km au « jour 15 » d'entraînement. Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole Σ :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 66\,000$$

2. La distance parcourue au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » d'entraînement est

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k$$

$$S = 5 \times \frac{u_8 + u_{12}}{2} = 5 \times \frac{3\,000 + 150 \times 8 + 3\,000 + 150 \times 12}{2} = 5 \times \frac{9\,000}{2} = 22\,500$$

Pour vérifier, on saisit sur la calculatrice.

Sur TI **som(suite(3000 + 150X,X,8,12))**

Sur Casio $\sum_{X=8}^{12} (3000+150X)$

La calculatrice affiche 22 500. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 22 500 m soit 22,5 km au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » d'entraînement.

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k = 22\,500$$

3. Moyenne arithmétique de deux nombres

Méthode

Calculer une moyenne arithmétique de deux nombres

 **Vidéo** https://youtu.be/a-RRUIS_CR8

1. Calculer la moyenne arithmétique des nombres -3 et 19.

2. Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit ?

Solution

En mathématiques, la **moyenne arithmétique** d'une liste de nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

1. La moyenne arithmétique d'une suite de valeurs est donc la moyenne que l'on connaît depuis le collège. Soit ici

$$m = \frac{-3+19}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

2. Si on note u_n le terme d'une suite arithmétique, on a $u_{n+1} = u_n + r$ où r est la raison de la suite.

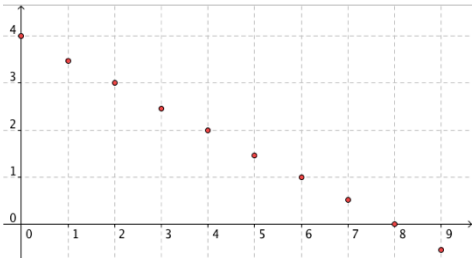
Et on a également : $u_n = u_{n-1} + r$ donc $u_{n-1} = u_n - r$

La moyenne arithmétique du terme qui précède u_n et du terme qui le suit est égale à

$$m = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n - r + u_n + r}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

Donc u_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

RÉSUMÉ

	(u_n) est une suite arithmétique de raison r de premier terme u_0	Exemple $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$
Forme explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n - 1)r$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$, (u_n) est croissante. Si $r < 0$, (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Somme des termes consécutifs	$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$u_3 + \dots + u_{10} = 8 \times \frac{u_3 + u_{10}}{2}$
Représentation graphique	Les points de la représentation graphique sont alignés . On parle de croissance linéaire.	

II. Suites géométriques

1. Rappels

Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : 4, 12 et 36. Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique ? Pour y répondre, il faut s'assurer que le quotient entre deux termes consécutifs reste le même.

$$12:4 = 3 \quad 36:12 = 3$$

Ce quotient reste égal à 3. 4, 12 et 36 sont bien les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.

Si on note (u_n) cette suite, on a $u_{n+1} = 3u_n$

Rappel

Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/pHq6oClOylU>

Forme explicite d'une suite géométrique

Méthode

Exprimer une suite géométrique en fonction de n

 **Vidéo** <https://youtu.be/WTmdtbQpa0c>

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an. On note u_n la valeur du capital après n années.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
4. Donner la variation de la suite (u_n) .
5. Exprimer u_n en fonction de n .

Solution

1. Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

$$u_0 = 500 \quad u_1 = 1,04 \times 500 = 520 \quad u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80 \quad u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,04$. On parle ici de **croissance exponentielle**.

3. Soit n un entier naturel, $u_{n+1} = 1,04 u_n$

4. $q = 1,04 > 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

5. Après 1 an, le capital est égal à $u_1 = 1,04 \times 500$

Après 2 ans, le capital est égal à $u_2 = 1,04^2 \times 500$

Après 3 ans, le capital est égal à $u_3 = 1,04^3 \times 500$

De manière générale, après n années, le capital est $u_n = 1,04^n \times 500$

Propriété

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , on a

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

2. Somme des termes d'une suite géométrique

Méthode

Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

 **Vidéo** https://youtu.be/_BjEOTi-2z8

 **Vidéo** <https://youtu.be/44YbOfRQgjk>

1. On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 5$

a. Exprimer u_n en fonction de n .

b. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=5}^{20} u_k$$

2. Chaque début d'année, on place un capital de 500 € sur un même compte à un taux annuel de 3 %. Calculer la valeur totale disponible sur le compte après 7 ans.

Solution

1. a. Soit n un entier naturel, $u_n = 5 \times 2^{n-1}$

1. b. On calcule la somme

$$S = \sum_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \dots + u_{20}$$

Propriété

La somme S des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Ainsi

$$S = u_5 \times \frac{1 - q^{16}}{1 - q} = 5 \times 2^4 \times \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} = -80 \times (1 - 2^{16}) = 5\,242\,800$$

On vérifie avec la calculatrice.

Sur TI `som(suite(5 * 2^(X - 1), X, 5, 20))`

Sur Casio `Σ(5×2X-1)
X=5 20`

La calculatrice affiche 5 242 800. Donc $S = \sum_{k=5}^{20} u_k = 5\,242\,800$

2. On considère la suite (v_n) exprimant la valeur acquise pour 500 € placés durant n années. (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 (correspondant à une augmentation de 3 % par an) et de premier terme $v_0 = 500$.

On veut calculer la valeur totale acquise après 7 ans et 7 versements échelonnés chaque année.

Le 1^{er} versement reste placé pendant 7 ans, il rapporte $v_7 = 500 \times 1,03^7$

Le 2^e versement reste placé pendant 6 ans, il rapporte $v_6 = 500 \times 1,03^6$

Le 3^e versement reste placé pendant 5 ans, il rapporte $v_5 = 500 \times 1,03^5$

Le 4^e versement reste placé pendant 4 ans, il rapporte $v_4 = 500 \times 1,03^4$

Le 5^e versement reste placé pendant 3 ans, il rapporte $v_3 = 500 \times 1,03^3$

Le 6^e versement reste placé pendant 2 ans, il rapporte $v_2 = 500 \times 1,03^2$

Le 7^e versement reste placé pendant 1 an, il rapporte $v_1 = 500 \times 1,03^1$

La valeur totale acquise après 7 ans est la somme

$$S = \sum_{k=1}^7 v_k$$

Soit

$S = 500 \times 1,03^1 + 500 \times 1,03^2 + \dots + 500 \times 1,03^7 = 500 \times (1,03^1 + 1,03^2 + \dots + 1,03^7) \approx 500 \times 7,89 \approx 3946$
La valeur acquise après 7 ans est environ égale à 3 946 €.

3. Moyenne géométrique de deux nombres

La moyenne géométrique de deux nombres a et b **strictement positifs** est un nombre c tel que

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

On constate ainsi que pour une suite géométrique chaque terme est la moyenne géométrique du **terme qui le précède** et du **terme qui le suit**. Pour une suite géométrique de terme u_n , on obtient en effet

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{ab}{c} = c \Rightarrow ab = c^2 \Rightarrow c^2 = ab \Rightarrow c = \sqrt{ab}$$

On peut alors étendre cette définition si a ou b sont nuls.

La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est égale à $\sqrt{ab}$.

Méthode

Calculer une moyenne géométrique de deux nombres

 **Vidéo** https://youtu.be/w_Vj2URV1Qo

1. Calculer la moyenne géométrique de 4 et 9.
2. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ telle que la moyenne géométrique de u_0 et u_2 soit égale à 10. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

Solution

1. La moyenne géométrique de 4 et 9 est égale à $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$
2. Pour une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit. Donc en particulier ici, u_1 est la moyenne géométrique de u_0 et u_2 . Donc $u_1 = 10$.

$$u_1 = q \times u_0 \Leftrightarrow 10 = q \times 2 \Leftrightarrow q = 5$$

La suite (u_n) a pour raison 5.

4. Comparaison de suites

Méthode

Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement.

- **Placement A**
On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.
- **Placement B**
On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre. On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1. a. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
1. b. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
2. Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
4. Déterminer le plus petit entier n , tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Solution

1. a. Avec le placement A, on gagne chaque année 6 % de 200 €, soit 12 €.
 $u_0 = 200$
 $u_1 = 200 + 12 = 212$
 $u_2 = 212 + 12 = 224$
 $u_3 = 224 + 12 = 236$

1. b. Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.

$$v_0 = 200$$

$$v_1 = 1,04 \times 200 = 208$$

$$v_2 = 1,04 \times 208 = 216,32$$

$$v_3 = 1,04 \times 216,32 = 224,97$$

2. (u_n) est une suite **arithmétique** de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 12$

(v_n) est une suite **géométrique** de premier terme $v_0 = 200$ et de raison

$$q = 1,04$$

X	Y ₁	Y ₂
14	368	346.34
15	380	360.19
16	392	374.6
17	404	389.58
18	416	405.16
19	428	421.37
20	440	438.22

3. Soit n un entier naturel,

$$u_n = 200 + 12n \quad v_n = 200 \times 1,04^n$$

4. Pour saisir l'expression du terme général, on procède comme pour une fonction.

$$Y_1 \equiv 200 + 12X$$

$$Y_2 \equiv 200 * 1.04^X$$

Il faut paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table ci-contre.

Le plus petit entier n , tel que $u_n < v_n$ est 21. Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

Décibels - Téléphones VS Avion

 Vidéo <https://youtu.be/mvXGq5S0eAM>

RÉSUMÉ	(u_n) est une suite géométrique de raison q positive et de premier terme u_0 positif	Exemple $q = 2$ et $u_0 = 4$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Forme explicite	$u_n = u_0 \times q^n \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$	$u_n = 4 \times 2^n$
Somme des termes consécutifs	$Somme = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$	$u_4 + \dots u_{12} = u_4 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2}$
Variations	Si $q > 1$, (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.	