Câu 44. **[2D3-2.3-4].** **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0$

Ta có: $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1$.

Do đó $\int_0^1[f(x)-\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$ (do $[f(x)-\sin(\pi x)]^2\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k.g(x)$, $\forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x)$, $k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1 \Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 46: **[2D3-2.3-4] (SỞ GD-ĐT NINH BÌNH -2018)** Cho $I_n=\int \tan^n x\,dx$ với $n\in\mathbb{R}$. Khi đó $I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}$ bằng

A. $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **B.** $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$. **C.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$. **D.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$.

Lời giải

Chọn A.

$I_n=\int \tan^{n-2}x.\tan^2 x\,dx=\int \tan^{n-2}x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \tan^{n-2}x.(\tan x)'\,dx-I_{n-2}$

$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}+C$

$\Rightarrow I_n+I_{n-2}=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}+C$.

$I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}=(I_{10}+I_8)+(I_9+I_7)+...+(I_3+I_1)+(I_2+I_0)$

$=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^8 x}{8}+....+\frac{\tan^2 x}{2}+\tan x+C=\sum_{r=1}^{9}\frac{\tan^r x}{r}+C$.

Câu 34. **[2D3-2.3-4] (CHUYÊN HÀ TĨNH -LẦN 1-2018)** Cho $I=\int_0^m (2x-1)e^{2x}dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I<m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P=a-3b$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=-1$.

Lời giải

Chọn A.

$I=\int_0^m (2x-1)e^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\ v=\frac{e^{2x}}{2}\end{cases}$.

$I=\int_0^m (2x-1)e^{2x}dx=\frac{(2x-1)e^{2x}}{2}\Big|_0^m-\int_0^m e^{2x}dx=\frac{(2m-1)e^{2m}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^m=me^m-e^{2m}+1$

$I<m\Leftrightarrow me^{2m}-e^{2m}+1<m\Leftrightarrow(m-1)(e^{2m}-1)<0\Leftrightarrow 0<m<1$.

Suy ra $a=0,b=1\Rightarrow a-3b=-3$.

Câu 42: **[2D3-2.3-4] (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH -LẦN 1-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1.$$

Do đó $\int_0^1[f(x)-\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=kg(x),\forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k\sin(\pi x)$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}$.