

PHYSIQUE

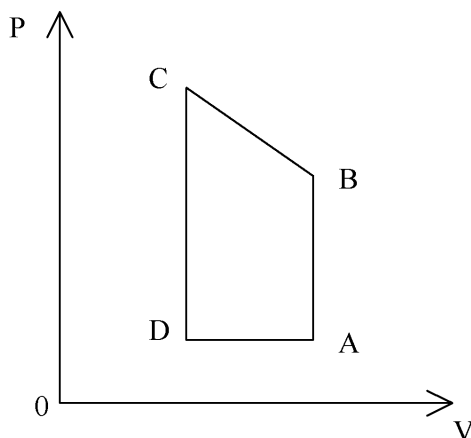
QUELQUES ASPECTS DE LA CIRCULATION SANGUINE

A) LE COEUR, MOTEUR DE LA CIRCULATION SANGUINE

On donne le diagramme de Watt du cycle du ventricule gauche du coeur humain.

Rappel : diagramme de Watt

Il ne faut pas confondre diagramme de Watt et diagramme de Clapeyron. Dans le diagramme de Watt, le volume porté en abscisse est le volume du ventricule. Dans le diagramme de Clapeyron, le volume porté en abscisse est le volume du système fermé choisi : ici il faudrait choisir une quantité donnée de sang comme système.



$$V_A = V_B = 150 \text{ cm}^3$$

$$V_C = V_D = 90 \text{ cm}^3$$

$$P_A - P_0 = P_D - P_0 = 10 \text{ mm Hg}$$

$$P_B - P_0 = 80 \text{ mm Hg}$$

$$P_C - P_0 = 120 \text{ mm Hg}$$

où $P_0 = 760 \text{ mm Hg}$ représente la pression atmosphérique

On rappelle que $760 \text{ mm Hg} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

A-1) Le cycle est décrit dans le sens trigonométrique : partant par exemple de A, le ventricule, plein de sang, à son volume maximal.

- Le muscle se contracte et la pression augmente, le sang n'étant pas encore poussé dans l'aorte (partie AB),
- puis le ventricule se vide, son volume diminue, mais la pression continue à augmenter (partie BC).
- lorsque le ventricule a son volume minimal, le muscle se relâche et la pression diminue (CD).
- enfin l'aspiration de sang lorsque le volume du ventricule augmente de nouveau (DA).

* Rôle de la pression atmosphérique

La pression dans le ventricule est due à la contraction du muscle cardiaque, et le sang n'est pas en contact avec l'atmosphère. La pression atmosphérique ne joue aucun rôle.

A-2) Travail fourni par le coeur

L'aire définie par le cycle représenté dans le diagramme de Watt est numériquement égale au travail mis en jeu au cours de ce cycle. C'est ici l'aire d'un trapèze rectangle

$$W = (V_A - V_D) \cdot (P_B - P_A) + \frac{1}{2} (V_B - V_C) \cdot (P_C - P_B)$$

ou, puisque $V_A = V_B$ et $V_C = V_D$

$$W = (V_A - V_C) \cdot \left(\frac{1}{2} (P_B + P_C) - P_A \right)$$

* On vérifie que la pression atmosphérique n'apparaît pas dans l'expression du travail obtenue, conformément à ce qui a été dit en A-1.

A-3) Puissance fournie par le coeur

C. Lacombe Champollion Grenoble

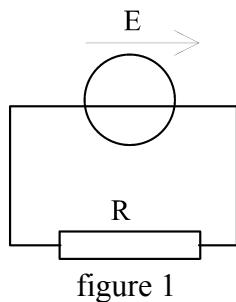
La puissance étant le travail fourni par unité de temps, si n est le nombre de cycles effectués par unité de temps, la puissance P fournie par le coeur sera $P = n \cdot W$ puisque W est le travail fourni pour un seul cycle.

$$P = n \cdot (V_A - V_C) \cdot \left(\frac{1}{2} (P_B + P_C) - P_A \right)$$

* Application numérique

 $n = 70/60$ cycles par secondeAttention, ne pas oublier d'exprimer les volumes en m^3 et les pressions en Pa : $P = 0,84$ wattB) QUELQUES CALCULS DE PUISSANCES :

B-1) Calculs de puissance pour le circuit de la figure 1



a) Le courant circulant dans ce circuit est $I = E/R$ et la puissance fournie par la source idéale de tension est $P_g = E \cdot I = E^2/R$

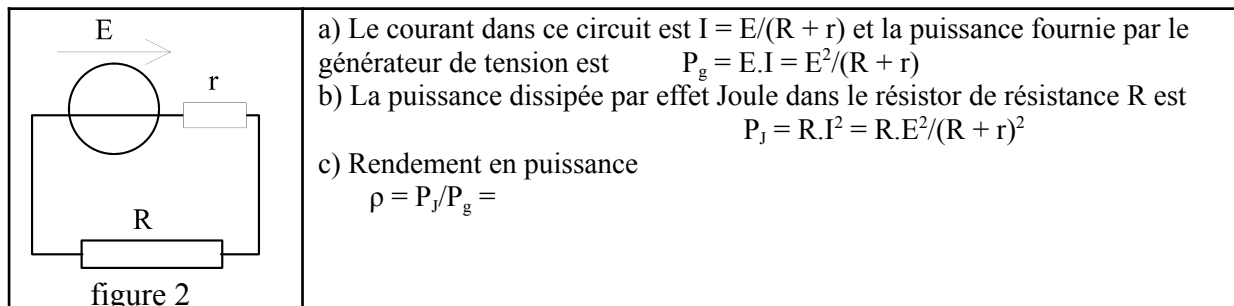
b) La puissance dissipée par effet Joule dans le résistor de résistance R est $P_j = R \cdot I^2 = E^2/R$

c) Le rapport $\rho = P_j/P_g = 1$ c'est à dire que l'intégralité de la puissance fournie par le générateur est dissipée dans R par effet Joule.

d) Application numérique

$P_g = 12^2/10^2 = 1,44$ watts du même ordre de grandeur que la puissance fournie par le coeur.

B-2) Prise en compte de la résistance interne du générateur



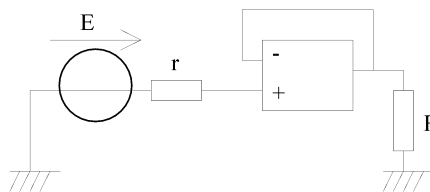
a) Le courant dans ce circuit est $I = E/(R + r)$ et la puissance fournie par le générateur de tension est $P_g = E \cdot I = E^2/(R + r)$

b) La puissance dissipée par effet Joule dans le résistor de résistance R est $P_j = R \cdot I^2 = R \cdot E^2/(R + r)^2$

c) Rendement en puissance

$$\rho = P_j/P_g =$$

B-3) Amélioration du rendement en puissance



a) Le montage réalisé autour de l'amplificateur opérationnel est un suiveur de tension, car la tension à la sortie de l'AO est égale à la tension (par rapport à la masse) de l'entrée non inverseuse de l'AO.

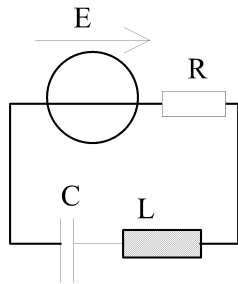
b) L'AO étant supposé idéal, les courants d'entrée sont nuls. Donc le générateur ne débite pas de courant. Il ne fournit aucune puissance, soit $P_g = 0$.

c) Le montage étant un suiveur, la tension aux bornes de R est égale à $V_+ = E$ (on a vu que le générateur ne débite pas) et le courant traversant ce résistor est E/R . La puissance dissipée par effet Joule dans R est donc $P_j = E^2/R$.

d) Le rapport $\rho = P_j/P_g$ est donc infini. Il n'y a aucune contradiction dans ce résultat, car la puissance dissipée par le résistor est fournie, non pas par le générateur, mais par les deux alimentations de l'amplificateur opérationnel (rappelons qu'un amplificateur opérationnel est alimenté par deux alimentations, le plus souvent symétriques).

B-4) Circuit RLC série en alternatif sinusoïdal

C. Lacombe Champollion Grenoble



a) Calcul du courant dans le circuit

On peut choisir de raisonner sur les grandeurs complexes, ou d'utiliser la construction de Fresnel pour déterminer le courant dans le circuit. Nous choisissons la méthode des complexes.

Si I est le courant dans la maille

$$\bar{E} = \left(R + j.L.\omega + \frac{1}{j.C.\omega} \right) \bar{I}$$

D'où

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega} \right)^2}}$$

et

$$\tan \varphi = - \frac{L.\omega - \frac{1}{C.\omega}}{R}$$

b) Puissance moyenne dissipée dans R

Le courant instantané est $i(t) = I_m \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$ donc la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le résistor est $p_J(t) = R \cdot i(t)^2 = R \cdot I_m^2 \cdot \cos^2(\omega.t + \varphi)$

$$\langle P_J \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T R \cdot I_m^2 \cdot \cos^2(\omega.t + \varphi) dt$$

La puissance moyenne dissipée par le résistor est donc

T étant la période de la tension sinusoïdale soit $T = 2\pi/\omega$.

$$\cos^2(\omega.t + \varphi) = \frac{1 + \cos 2.(\omega.t + \varphi)}{2} \quad \text{d'où} \quad \langle P_J \rangle = \frac{R \cdot I_m^2}{2.T} \int_{t=0}^T (1 + \cos 2.(\omega.t + \varphi)) dt$$

Après calcul

$$\langle P_J \rangle = R \frac{I_m^2}{2}$$

c) Puissance moyenne fournie par le générateur

A un instant t , la tension instantanée aux bornes du générateur est $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega.t)$ et le courant $i(t) = I_m \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$, donc la puissance instantanée fournie par la source de tension est

$$p_g(t) = e(t) \cdot i(t) = E_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega.t) \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

La puissance moyenne fournie par le générateur est donc

$$\langle P_g \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T E_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega.t) \cdot \cos(\omega.t + \varphi) dt$$

En transformant

$$\cos(\omega.t) \cdot \cos(\omega.t + \varphi) = \frac{1 + \cos 2.(\omega.t)}{2} \cdot \cos \varphi - \sin(\omega.t) \cdot \cos(\omega.t) \cdot \sin \varphi$$

puis en calculant les deux intégrales, il vient

$$\langle P_g \rangle = E_m \cdot I_m \cdot \cos \varphi$$

* Rendement

$$\rho = \frac{\langle P_J \rangle}{\langle P_g \rangle} = \frac{R \cdot I_m}{2 \cdot E_m \cdot \cos \varphi} = \frac{R}{2 \cdot \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega} \right)^2} \cdot \cos \varphi}$$

$$L.\omega_0 - \frac{1}{C.\omega_0} = 0$$

Ce rendement prend une valeur particulière à la résonance : pour $\omega = \omega_0$ tel que courant et tension sont en phase, et $\rho = 0,5$. Exactement la moitié de la puissance fournie par le générateur est dissipée dans le résistor.

C. Lacombe Champollion Grenoble

C) ÉCOULEMENT DU SANG DANS UNE VEINE OU UNE ARTÈRE :

C-1-1) Définition de la viscosité

Voir cours : introduction par l'étude expérimentale de l'écoulement plan de Couette, conduisant

à $\left\| \vec{F} \right\| = \eta \cdot S \cdot \frac{V}{e}$ où F est la force que l'opérateur exerce sur la plaque mobile, V la vitesse de cette plaque, S son aire et e l'épaisseur de liquide entre les deux plans. Par définition le facteur de proportionnalité η est la viscosité dynamique du fluide.

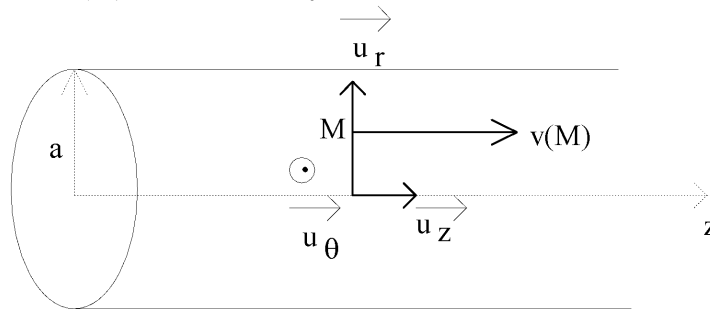
C-1-2) Chute de pression

$$\left\| \vec{F} \right\| = \eta \cdot S \cdot \left| \frac{dv(r)}{dr} \right|$$

La donnée, dans le texte, de l'expression de la force de viscosité nous suggère de définir une particule de fluide mésoscopique et de lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

* Propriétés de l'écoulement

De l'hypothèse faite sur le champ des vitesses $\vec{v}(M) = v(r, \theta, z) = v(r) \cdot \vec{u}_z$, on déduit que l'écoulement est unidirectionnel et présente la symétrie axiale de révolution autour de l'axe z . Le champ des pressions $P(M)$ aura la même symétrie.



* Référentiel

L'observation de l'écoulement est faite dans le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen.

* Système

On choisit une particule de fluide mésoscopique, telle que tous ses points aient la même vitesse, donc le système choisi sera le fluide contenu dans la pellicule cylindrique limitée par les rayons r et $r + dr$ et les sections de cote z_A et z_B , avec $z_B = z_A + L$ (soit de longueur L)

* Bilan des forces

La pesanteur étant négligée par hypothèse, le système choisi n'est soumis qu'aux deux forces :

a - Forces pressantes s'exerçant sur la surface de la particule de fluide

Les forces pressantes étant perpendiculaires à la surface sur laquelle elles s'exercent, du fait de la symétrie cylindrique de la particule de fluide, leur résultante sur les surfaces latérales $S(r)$ et $S(r + dr)$ s'annule. Il ne restera que les forces pressantes s'exerçant sur les surfaces de base dS_A et dS_B . Elles s'écrivent respectivement

$$\vec{dF}_{PA} = dS_A \cdot P_A \cdot \vec{u}_z = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot P_A \cdot \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{dF}_{PB} = -dS_B \cdot P_B \cdot \vec{u}_z = -2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot P_B \cdot \vec{u}_z$$

si $\vec{dF}_{PA}$ et $\vec{dF}_{PB}$ sont les forces s'exerçant sur les surfaces dS_A et dS_B respectivement.

b - Forces de viscosité s'exerçant sur les surfaces latérales

Elles s'exercent tangentiellement à la surface et sont donc colinéaires à $\vec{u}_z$.

C. Lacombe Champollion Grenoble

La force de viscosité s'exerçant sur la surface latérale intérieure, de rayon r sera

$$\vec{dF}_r = \eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_r \vec{u}_z$$

et la force de viscosité s'exerçant sur la surface latérale extérieure, de

$$\vec{dF}_{r+dr} = -\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r + dr) \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_{r+dr} \vec{u}_z$$

rayon r + dr sera

déterminés par l'hypothèse que v(r) est une fonction décroissante de r.

* Application du principe fondamental de la dynamique à cette particule de fluide

L'écoulement du sang étant supposé permanent, les grandeurs physiques le décrivant sont indépendantes du temps, et en particulier la vitesse : donc l'accélération de la particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire, est nulle.

La somme des forces appliquées à la particule de fluide est nulle :

$$\vec{dF}_{PA} + \vec{dF}_{PB} + \vec{dF}_r + \vec{dF}_{r+dr} = \vec{0}$$

soit, puisque ces quatre forces sont colinéaires

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot P_A - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot P_B + 2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_r - 2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot (r + dr) \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_{r+dr} = 0$$

$$\text{ou } r \cdot dr \cdot (P_A - P_B) = -\eta \cdot r \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_r + \eta \cdot (r + dr) \cdot L \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_{r+dr}$$

$$(P_A - P_B) = \eta \cdot L \cdot \left((r + dr) \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_{r+dr} - r \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right)_r \right) \frac{1}{r \cdot dr}$$

$$(P_A - P_B) = \eta \cdot \frac{L}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \left(\frac{dv(r)}{dr} \right) \right) \quad (1')$$

Remarque : Calcul avec une particule de fluide de fluide différente

* Système

On choisit comme système le liquide contenu dans le cylindre d'axe z, de rayon r et limité par les sections de cote zA et zB. avec zB = zA + L (soit de longueur L) :

INCORPORER MSDraw

Ce calcul n'est pas satisfaisant, car tous les points de la particule fluide n'ont pas la même vitesse.

* Bilan des forces

La pesanteur étant négligée par hypothèse, le système choisi n'est soumis qu'aux deux forces :

a - Forces pressantes s'exerçant sur la frontière du système

Les forces pressantes étant perpendiculaires à la surface sur laquelle elles s'exercent, du fait de la symétrie cylindrique de la particule de fluide, leur résultante sur la surface latérale S(r) s'annule. Il ne restera que les forces pressantes s'exerçant sur les surfaces de base SA et SB. Elles s'écrivent respectivement

INCORPORER Equation.3

et

INCORPORER Equation.3

si INCORPORER Equation.3 et INCORPORER Equation.3 sont les forces s'exerçant sur les surfaces dSA et dSB respectivement.

b - Forces de viscosité s'exerçant sur les surfaces latérales

Elles s'exercent tangentielllement à la surface et sont donc colinéaires à INCORPORER Equation.3 .

La force de viscosité s'exerçant sur la surface latérale, de rayon r sera INCORPORER Equation.3 . Le signe de cette expression est déterminé par l'hypothèse que v(r) est une fonction décroissante de r, donc que la dérivée est négative.

C. Lacombe Champollion Grenoble

* Application du principe fondamental de la dynamique à ce volume de fluide

L'écoulement du sang étant supposé permanent, les grandeurs physiques le décrivant sont indépendantes du temps, et en particulier la vitesse : donc l'accélération de la particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire, est nulle.

La somme des forces appliquées à la particule de fluide est nulle :

INCORPORER Equation.3

soit, puisque ces trois forces sont colinéaires INCORPORER Equation.3

ou

INCORPORER Equation.3 (1) Avec ce choix de système on obtient bien la relation donnée dans le texte !

* Cas d'un fluide parfait

Par définition, c'est un fluide pour lequel la viscosité peut être négligée.

Si on pose ($\eta = 0$ dans la relation (1) on est conduit à

$P_A = P_B$

Il n'y a pas de différence de pression dans un écoulement parfait

C-2-1) Champ des vitesses

L'équation (1) peut s'écrire INCORPORER Equation.3 qui s'intègre en INCORPORER Equation.3

soit INCORPORER Equation.3

La constante d'intégration est déterminée par les conditions aux limites, ici par le fait qu'au niveau de la paroi du vaisseau, la vitesse du sang est nulle (existence de la couche limite, adhérent à la paroi) :

pour $r = a$ $v(a) = 0$ d'où INCORPORER Equation.3 ou INCORPORER Equation.3

D'où

INCORPORER Equation.3

(2)* Profil de vitesse

INCORPORER MSDraw $v(r)$ peut être représenté de la manière ci-contre, pour conserver le sens de la figure du texte.

* Vitesse maximale

La vitesse est maximale sur l'axe du vaisseau sanguin, soit pour $r = 0$, avec la valeur

INCORPORER Equation.3 (3)

C-2-2)

a) Débit de volume (ou débit volumique)

* Définition

Le débit de volume à travers une section droite du vaisseau sanguin est le volume de sang qui traverse cette section droite pendant l'unité de temps.

* Propriétés

L'écoulement du sang ayant été supposé permanent, et le sang étant incompressible, le débit volumique est conservatif, c'est à dire qu'il a la même valeur pour toute section du vaisseau sanguin.

b) Expression du débit volumique

INCORPORER MSDraw A travers la surface élémentaire annulaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ (en grisé sur la figure ci-contre), le débit volumique est $dQ = 2(\pi r dr v(r))$ et à travers la section droite du vaisseau sanguin

INCORPORER Equation.3

Soit après intégration INCORPORER Equation.3 (4)

* Ce résultat est connu sous le nom de "loi de Poiseuille". c) Analogie électrocinétique

écoulement d'un fluide courant électrique Cause du transport chute de pression tension électrique (ou différence de potentiel) Grandeur transportée débit de volume intensité du courant électrique (ou débit de charge électrique) Loi de Poiseuille Loi d'Ohm Rapport Cause/Grandeur INCORPORER Equation.3

résistance hydraulique INCORPORER Equation.3

résistance électrique

C-2-3) Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est définie par la relation INCORPORER Equation.3 (5)

a) C'est la vitesse que devrait avoir l'écoulement, s'il était uniforme, pour que le débit volumique soit le

C. Lacombe Champollion Grenoble

même. En effet INCORPORER Equation.3 n'est autre que le débit de volume Q.

* Avec la loi de Poiseuille, nous pouvons écrire INCORPORER Equation.3

b) Pour exprimer le débit, nous avons immédiatement

INCORPORER Equation.3

INCORPORER Equation.3 (6)

c) Nous avons établi l'expression de la vitesse maximale INCORPORER Equation.3 soit en utilisant la loi de Poiseuille INCORPORER Equation.3 et comme INCORPORER Equation.3 on en déduit

$VM = 2.v_m$

La vitesse maximale du sang dans le vaisseau sanguin vaut deux fois la vitesse moyenne

C-2-4) APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Données : $Q = 8,30.10^{-5} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

Nous pouvons faire l'application numérique en utilisant la relation (6) qui donne INCORPORER Equation.3

a) *Vitesse moyenne d'écoulement du sang dans l'aorte :

Le rayon est $a_{aorte} = 1,0 \text{ cm}$ et tout le sang passe dans cette artère d'où INCORPORER Equation.3
 $v_m(aorte) = 0,264 \text{ m.s}^{-1} = 26,4 \text{ cm.s}^{-1}$

*Vitesse moyenne d'écoulement du sang dans un capillaire :

Le rayon est $a_{capillaire} = 1,0.10^{-3} \text{ cm}$, mais il faut calculer le débit de volume q dans un capillaire.

La surface totale des capillaires étant S et le débit total Q le débit de volume dans un capillaire de rayon $a_{capillaire}$ est

INCORPORER Equation.3 et la vitesse moyenne d'écoulement du sang INCORPORER Equation.3
 $v_m(\text{capillaire}) = 4,15.10^{-4} \text{ m.s}^{-1} = 0,415 \text{ mm.s}^{-1}$

b) Perte de pression par unité de longueur

Nous la calculons à l'aide de la loi de Poiseuille INCORPORER Equation.3 soit INCORPORER Equation.3

- pour l'aorte INCORPORER Equation.3 = $42,3 \text{ Pa.m}^{-1}$

- pour un capillaire INCORPORER Equation.3 = $6,6 \text{ Pa.m}^{-1}$

* Pour le capillaire, de rayon plus petit, on s'attendrait à une perte de pression plus grande que pour l'aorte. Mais ceci serait vrai pour un même débit : or ici le débit dans un capillaire est beaucoup plus petit que dans l'aorte. La mise en parallèle de multiples capillaires, avec un faible débit volumique dans chacun d'eux, permet, d'un point de vue mécanique des fluides, de limiter la perte de pression linéique. La résistance hydraulique de chaque capillaire est beaucoup plus grande que celle de l'aorte, mais la mise en parallèle de nombreux capillaires donne une résistance équivalente sensiblement du même ordre de grandeur.

* On néglige les phénomènes de capillarité ?

C-2-5) Nombre de Reynolds

Son expression est rappelée : INCORPORER Equation.3

a) C'est un nombre pur, donc sans dimension :

En effet, si nous écrivons les dimensions de chaque grandeur de l'expression de RE

- masse volumique $[\rho] = \text{masse}/\text{volume} = \text{masse}/\text{longueur}^3$

- viscosité dynamique $[\eta] = \text{Pression} \times \text{temps} = (\text{Force} / \text{longueur}^2) \times \text{temps}$

= $\text{masse} / \text{temps} / \text{longueur}$

- vitesse moyenne $[v_m] = \text{longueur} / \text{temps}$

- rayon du vaisseau $[a] = \text{longueur}$

et on vérifie que le nombre de Reynolds est bien sans dimension.

b) Signification physique de RE

Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport des coefficients de transport de quantité de mouvement par convection (transport dû au déplacement du fluide) et par diffusion (transport dû à la viscosité du fluide). Si ce rapport est très grand devant 1, le transport est essentiellement convectif, le cas limite RE tendant vers l'infini correspondant à un transport exclusivement convectif, ce qui

C. Lacombe Champollion Grenoble

équivalent à négliger la viscosité du fluide (fluides parfaits ou écoulements parfaits).

c) * Nombre de Reynolds pour l'aorte $RE = 2,7 \cdot 10^{-3}$

* Nombre de Reynolds pour un capillaire $RE = 4,3 \cdot 10^{-7}$

Dans les deux cas le nombre de Reynolds est inférieur à 1, l'hypothèse "écoulement laminaire" est parfaitement justifiée (on rappelle que le nombre de Reynolds critique est de l'ordre de 1500 à 2000). Ces écoulements sont des écoulements rampants pour lesquels le transport convectif de quantité de mouvement est négligeable devant le transport diffusif.

D) ÉTUDE DE LA VISCOSITÉ DU SANG :

Une étude théorique correspondant au cas des petits vaisseaux permet de modéliser la viscosité selon une loi :

INCORPORER Equation.3 où : a est le rayon du vaisseau sanguin

d est le diamètre moyen d'une hématie :

$d = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$

C est une constante positive

n est un nombre positif

D-1) Évaluation de C
Si cette loi modélise correctement la viscosité du sang, la viscosité tend vers C lorsque a tend vers l'infini : en d'autres termes ($\eta = C$ est une asymptote horizontale. La courbe expérimentale semble bien en accord avec ce modèle.

On peut estimer, en extrapolant la courbe ci-dessus au delà de $a = 1 \text{ mm}$, la valeur de $C = 0,00197 (0,00001 \text{ Pa.s})$ (rappelons que l'unité de viscosité est, dans le système international, le Pa.s ou Poiseuille).

D-2) Détermination de n

C étant maintenant connue, on peut calculer n à partir de n'importe lequel des points de la courbe expérimentale. La loi INCORPORER Equation.3 peut être écrite INCORPORER Equation.3. Faisons le calcul pour plusieurs points de la courbe expérimentale ci-dessus, avec $d = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, soit la relation numérique INCORPORER Equation.3

$a \text{ (mm)}$ 0,10,350,720,20 (Pa.s) 0,001680,001900,001950,00183 n (sans unité) 1,8481,4250,8211,675 η Pas très constant !!!

Sans suivre à la lettre les questions posées, il faut traiter globalement D-1 et D-2, et prendre en compte un plus grand nombre de valeurs numériques :

On peut écrire le modèle sous la forme INCORPORER Equation.3 puis tracer $\ln(\eta)$ en fonction de INCORPORER Equation.3 qui, si n et C sont des constantes, sera une droite de pente $-n$ et d'ordonnée à l'origine $\ln(C)$.

Dans le tableau ci-dessous $X = \ln(1 + d/a)$

a

(mm) 0,100,150,200,250,300,350,400,450,500,550,600 X 0,0860,0580,0440,0350,0290,0250,0220,0200,0180,0160,0150,001680,0017750,001830,0018650,001880,001900,0019150,0019250,001930,0019350,00194 $\ln$ (-6,389-6,340-6,303-6,284-6,276-6,266-6,260-6,253-6,250-6,2476-6,245

On en déduit

- la pente - 2,06

- l'ordonnée à l'origine -6,214

D'où, aux erreurs de mesure près, on peut en conclure

* que

$n = 2$

(n étant l'opposé de la pente)

* et que

$C = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$

C. Lacombe Champollion Grenoble

l'ordonnée à l'origine étant $\ln(C)$.

D-3) La viscosité a pour origine, à l'échelle microscopique, les interactions (de type Van der Waals...) entre les molécules de fluide, qui sont de courte portée. Dans le cas du sang, lorsque le rayon du vaisseau sanguin diminue, pour devenir de l'ordre de 10 d , le nombre d'hématies en interaction avec une hémacie donnée sera inférieur à ce nombre dans le cas d'un milieu "infini" et les interactions sont diminuées, donc la viscosité également.

Dans le cas de l'eau, les molécules sont de l'ordre de $10^{-6}/9.10^{-3} = 10^{-4}$ fois plus petites que les hématies, donc même en diminuant le rayon du vaisseau, le nombre de molécules d'eau en interaction ne diminuera pas, et la viscosité gardera la même valeur.

E) PRISE EN COMPTE DU CARACTÈRE NON PERMANENT DE L'ÉCOULEMENT DU SANG :

E-1) Équation différentielle en i_2

INCORPORER MSDraw Avec les conventions de la figure ci-contre

* Modèle de condensateur INCORPORER Equation.3 (a)

* Modèle de résistor $u = + R_2.i_2$ (b)

* Modèle de générateur $u = e - R_1.(i_C + i_2)$ (c)

(en appliquant la loi des noeuds au noeud A)

- dérivons (b) par rapport au temps INCORPORER Equation.3 et remplaçons dans (a)

INCORPORER Equation.3

- reportons cette expression de i_C dans (c) et (b) également dans (c), ce qui conduit à

INCORPORER Equation.3 ou

INCORPORER Equation.3

E-2) Résolution de l'équation différentielle

Posons INCORPORER Equation.3, (étant la constante de temps du circuit.

L'équation est du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et avec second membre constant.

Les solutions sont INCORPORER Equation.3 où K est une constante arbitraire, homogène à un courant. Cette constante est déterminée par les conditions initiales. Le texte ne précisant pas la valeur initiale du courant, nous prendrons $i_2(0) = i_{20}$.

* intervalle de temps $[0, T/2[$

Pour cet intervalle $e(t) = E_1$.

Exprimons K à partir de la condition initiale INCORPORER Equation.3

ou INCORPORER Equation.3

D'où

INCORPORER Equation.3 pour $[0, T/2[$ * intervalle de temps $[T/2, T[$

Pour cet intervalle $e(t) = E_2 (< E_1)$.

Pour cet intervalle de temps, la valeur initiale de i_2 est INCORPORER Equation.3

D'où la relation déterminant K : INCORPORER Equation.3

soit INCORPORER Equation.3

INCORPORER Equation.3 pour $[T/2, T[$

E-3) Représentation graphique

E-4) Analogie électrique

Courant électrique Écoulement force électromotrice e

(ou plus généralement tension U) Pression P intensité i_2 débit volumique Q résistance électrique $R =$

U/i résistance hydraulique $R_H = P/Q$

charge électrique volume de liquide condensateur réservoir

* L'analogie de la résistance électrique $R = U/i$ est la résistance hydraulique $R_H = P/Q$

* L'analogie du générateur de tension (ou source de tension) serait la "source de pression", c'est à dire d'une manière générale une pompe : ici il s'agit du coeur.

Remarque

* L'analogie du condensateur "réservoir de charge électrique" serait constitué par un réservoir de fluide : dans cet exemple il s'agit du ventricule, qui contient un volume de sang variable

C. Lacombe Champollion Grenoble

périodiquement au cours du temps, tout comme le condensateur accumule une charge électrique variable périodiquement (l'analogie de la charge électrique étant le volume de liquide). Cette analogie permet d'ajouter les deux dernières lignes du tableau précédent.

F) OBSERVATION EXPÉRIMENTALE D'UN ÉCOULEMENT

F.1.1) Formation d'une image nette sur le film

Nous utiliserons les notations suivantes, A' étant l'image de A donnée par la lentille (L1).

INCORPORER MSDraw

Toutes les grandeurs écrites sont algébriques, le sens positif choisi étant de gauche à droite.

* Relation de conjugaison pour la lentille (L1)

Les milieux extrêmes sont différents pour cette lentille : n, indice du liquide qui s'écoule dans la canalisation à gauche et $n' = 1$, indice de l'air à droite.

Rappels : dans ce cas la formule de conjugaison de la lentille mince s'écrit

INCORPORER Equation.3

(La lentille se comporte comme un dioptre sphérique)

Les deux distances focales sont différentes et vérifient INCORPORER Equation.3

- Dans notre cas, $n' = 1$ et la relation de conjugaison devient

INCORPORER Equation.3

f_1 est connue, mais pas n, indice du liquide.

La question ne pouvait être traitée correctement par les candidats, *l'étude des lentilles minces se limitant au cas de milieux extrêmes identiques.*

Nous continuons en considérant que les deux milieux extrêmes sont identiques.

INCORPORER Equation.3 ou INCORPORER Equation.3 (1)

* Relation de conjugaison pour la lentille (L2)

INCORPORER Equation.3 ou INCORPORER Equation.3 (2)

puisque $O2A' = O2O1 + O1A' = -d + O1A'$ et que l'image finale se forme dans le plan (P).

Exprimons $O1A'$ à l'aide de (1) INCORPORER Equation.3 et reportons dans (2)

INCORPORER Equation.3 (3) *N'ayons pas besoin de résoudre cette équation, laissons-la sous cette forme.*

F.1.2)

Pour une lentille mince, le grandissement est INCORPORER Equation.3 où p' et p sont respectivement les positions de l'image et de l'objet par rapport au centre optique de la lentille.

Pour la lentille (L1) le grandissement sera INCORPORER Equation.3 et pour la lentille (L2)

INCORPORER Equation.3 .

Le grandissement du système sera donc INCORPORER Equation.3

Avec l'expression de $O1A'$ il vient INCORPORER Equation.3 ou

INCORPORER Equation.3 (4)

F.1.3-a) Application numérique

$x = 1,0 \text{ cm}$ $D = 10,0 \text{ cm}$ $f_1 = 0,5 \text{ cm}$ $f_2 = 2,0 \text{ cm}$

Résolvons numérique (3) qui s'écrit, avec les valeurs ci-dessus INCORPORER Equation.3 les modules des longueurs étant exprimés en centimètres. Soit

$$d^2 - 11d + 28 = 0$$

équation du second degré dont les racines sont

$$dA = + 7 \text{ cm} \quad \text{et} \quad dB = + 4 \text{ cm}$$

Il y a bien deux positions de (L2) donnant une image nette dans le plan de la pellicule.

F.1.3.-b) Grandissements

Avec l'expression (4) du grandissement, on calcule les deux grandissements correspondants aux deux positions de (L2) précédemment déterminées : INCORPORER Equation.3

$$d = dA = + 7 \text{ cm} \quad (A = 1/3)$$

$$d = dB = + 4 \text{ cm} \quad (B = 3)$$

C. Lacombe Champollion Grenoble

** Cette situation est identique à celle de la méthode de Bessel de mesure de la distance focale d'une lentille mince convergente.*

Remarque : le produit des deux grandissements est égal à 1.

F.2) Observation directe à l'oeil

Pour que l'oeil, placé dans le plan de la pellicule (la pellicule étant enlevée), puisse voir l'image de l'écoulement sans accommoder, il faut que cette image soit à l'infini. (L2) doit être telle que l'image de l'écoulement donnée par (L1) se forme dans le plan focal objet de (L2). Appelons do la position correspondante de (L2) :

Soit $do = OIO2 = OIA' + F2'O2$ ou INCORPORER Equation.3

A.N. $do = 3 \text{ cm}$

F.3.1) Conditions de Gauss

Un système optique donne d'un objet ponctuel une image si tous les rayons lumineux issus de cet objet passent, après traversée du système, par un même point : ce point est par définition l'image de l'objet. Mais il est exceptionnel qu'un système donne d'un objet ponctuel une image ponctuelle : si c'est le cas on dit que le système optique est stigmatique, et on parle même de stigmatisme rigoureux.

Le plus souvent, moyennant le respect de certaines conditions, le système donnera d'un objet ponctuel une image qui pourra être considérée comme ponctuelle : on dira que le stigmatisme est approché.

D'une manière générale, les conditions dans lesquelles doit travailler le système optique pour qu'il puisse être stigmatique de manière approchée sont appelées "conditions de Gauss" :

- les rayons lumineux qui traversent le système doivent être peu inclinés sur l'axe optique du système,*
- et ils doivent être peu éloignés de cet axe.*

F.3.2) Un moyen classique de se placer dans les conditions de Gauss consiste à diaphragmer les lentilles utilisées dans les montages. Mais plus on diaphragme, plus le phénomène de diffraction des faisceaux à travers les diaphragmes prend de l'importance. En pratique il faut trouver le meilleur compromis entre la réalisation des conditions de Gauss et la limitation de la diffraction.