

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель начальника
управления образования
Могилёвского облисполкома

_____ О.В.Стельмашок
«_____» ноября 2014 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 29 ноября 2014 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.00

8 класс

1. Существует ли прямоугольный треугольник, длины катетов которого выражаются целыми числами, а гипотенуза равна $\sqrt{2014}$? Ответ обосновать.
2. На циферблате механических часов вместо чисел, обозначающих количество часов, стоят большие красные точки (всего 12 точек). В центре циферблата нарисована такая же красная точка. Маленький Вася на циферблате рисует треугольники с вершинами в красных точках. Сколько различных треугольников у него может получиться? (Стрелки часов Вася отломал, чтобы не мешали).
3. Дана квадратная доска размером 22×22 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×4 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью закрывать 4 клетки доски.
4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка E такая, что $\angle ABE = \angle BAE = 15^\circ$. Доказать, что треугольник CED – равносторонний.
5. Доказать, что для любых чисел a , b и c хотя бы одно из неравенств $5a^2 \geq 4bc$, $5b^2 \geq 4ca$, $5c^2 \geq 4ab$ окажется истинным.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. *Решение.*

Предположим, что такой треугольник существует. Пусть длины его катетов равны целым числам a и b , тогда $a^2 + b^2 = 2014$. Нетрудно видеть, что числа a и b должны быть одинаковой четности. Если числа a и b четные, то их квадраты будут делиться на 4. Следовательно на 4 будет делиться и число $a^2 + b^2$, но число 2014 не делится на 4. Получили противоречие, следовательно, числа a и b – оба нечетные. Тогда их можно представить в виде: $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, где m и n – целые неотрицательные числа. Имеем: $(2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 2014$, $4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 2014$, $m^2 + m + n^2 + n = 503$, $m(m + 1) + n(n + 1) = 503$. Число $m(m + 1)$ является произведением двух последовательных целых чисел, одно из которых обязательно будет четным. Значит, число $m(m + 1)$ – четное. Аналогично, число $n(n + 1)$ – четное. Сумма двух четных чисел также будет числом четным. Но число 503 – нечетное. Противоречие. Следовательно, такого треугольника не существует.

Ответ: нет.

2. *Решение.*

Первую вершину треугольника Вася может выбрать 13 способами, вторую – 12, третью – 11. Итого три вершины можно выбрать $13 \cdot 12 \cdot 11$ способами. Необходимо учесть, что выбранные три вершины (например, А, В, С) могут быть выбраны в разном порядке: АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ, СВА (всего 6 вариантов). Поэтому количество различных

троек точек будет равно $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286$. (Знакомые с формулами комбинаторики тот же результат могут просто получить по формуле C_{13}^3). Заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то они не образуют треугольник. В нашем случае таких троек будет 6: центральная точка и пара диаметрально противоположных точек (точки стоящие на месте чисел 1 и 7, 2 и 8, ..., 6 и 12). Таким образом, у Васи может получиться $286 - 6 = 280$ различных треугольников.

Ответ: 280 треугольников.

3. *Решение.*

Если от данной доски отрезать уголок размера 2×2 , то оставшаяся часть доски может быть легко замощена прямоугольниками 1×4 . Таких прямоугольников на доске уместится

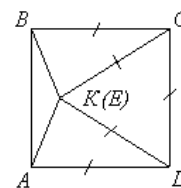
$\frac{22^2 - 2^2}{4} = 120$. Докажем, что большее число прямоугольников разместить не удастся. Разобьем доску на квадраты размера 2×2 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть при этом угловые квадраты будут черными. Всего квадратов будет $11 \cdot 11 = 121$. При этом 60 квадратов будут белыми и 61 черными, т.е. черных клеток будет на 4 больше, чем белых. Далее, заметим, что каждый прямоугольник 1×4 закрывает ровно 2 черные и 2 белые клетки, поэтому, если даже закрыть все белые клетки, то 4 черные клетки останутся незакрытыми. Всего на доске будет закрыто не более, чем $22^2 - 4 = 480$ клеток, что означает что на доске уместится не более, чем $480 : 4 = 120$ прямоугольников.

Ответ: 120.

Указание для жюри: если в задаче получен правильный ответ, но не доказано, что это наибольшее возможное количество прямоугольников, то за задачу выставляется 50% баллов от максимально возможных.

4. Решение

Будем решать задачу «с конца». Отметим внутри квадрата точку K такую, что $\triangle KCD$ – равносторонний. Тогда $\angle ADK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. $\triangle ADK$ равнобедренный, поэтому $\angle KAD = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ADK) = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$. Аналогично, $\angle KBC = 75^\circ$. Тогда $\angle KAB = \angle KBA = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Но по условию $\angle ABE = \angle BAE = 15^\circ$.



Тогда $\triangle AKB = \triangle AEB$ по стороне и двум прилежащим углам. А это означает, что точка K совпадает с точкой E . Поэтому $\triangle CED$ – равносторонний. Что и требовалось доказать.

5. Решение

Предположим противное: пусть все неравенства из условия задачи – ложные. Тогда истинными окажутся неравенства: $5a^2 < 4bc$, $5b^2 < 4ca$, $5c^2 < 4ab$. Сложим данные неравенства:

$$\begin{aligned} 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 &< 4bc + 4ca + 4ab \\ a^2 + 4a^2 + b^2 + 4b^2 + c^2 + 4c^2 - 4bc - 4ca - 4ab &< 0 \\ (a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 4bc + 4c^2) + (c^2 - 4ca + 4a^2) &< 0 \\ (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (c - 2a)^2 &< 0 \end{aligned}$$

Получили, что сумма квадратов трех чисел является отрицательной, что невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.