

BANQUE D'ÉPREUVES G2E

CORRIGÉ PHYSIQUE

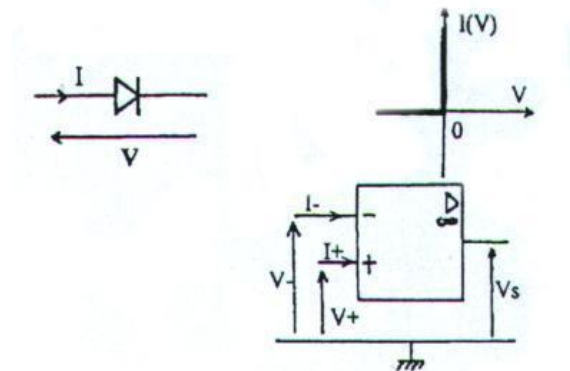
1^{ère} Partie

On envisage quelques utilisations d'une diode et on rappelle quelques définitions et propriétés :

* modélisation d'une diode idéale par sa caractéristique intensité du courant I , fonction de la tension à ses bornes V :

* Propriétés d'un amplificateur opérationnel (AO) idéal utilisé dans son domaine de fonctionnement linéaire :

$$\begin{aligned} V_- &= V_+ \\ |V_s| &\leq V_{\text{sat}} \text{ (tension de saturation)} \\ I_+ &= I_- = 0 \end{aligned}$$



* Valeur moyenne temporelle d'un signal $s(t)$, périodique, de période T :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

* $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

* q (valeur absolue de la charge électronique) = $1,6 \cdot 10^{-19}$ C

* k_B (constant de Boltzmann) = $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K

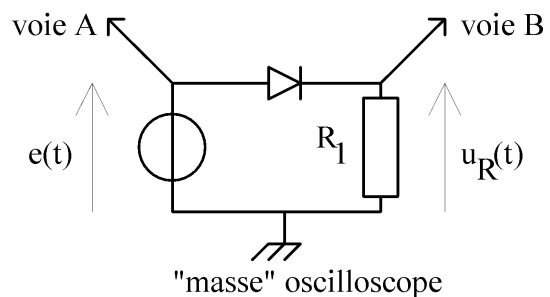
I. DIODE, RÉSISTANCE ET SOURCE DE TENSION SINUSOÏDALE

1. L'ensemble diode idéale D , résistance R_1 en série est alimenté par une source de tension sinusoïdale de fem $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t)$.

a. Visualisation des signaux $e(t)$ et $u_r(t)$

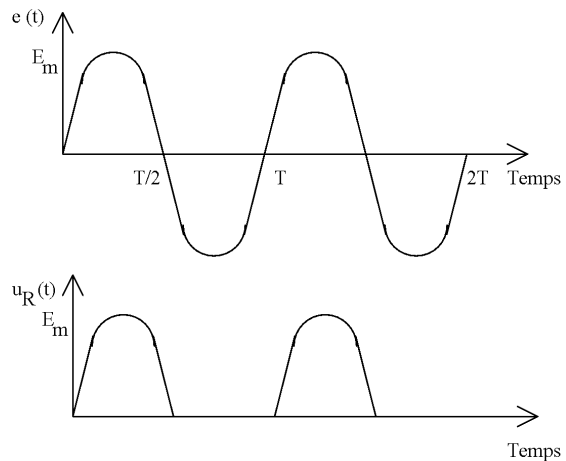
Il faut assurer une masse commune unique pour l'oscilloscope.

La voie A visualisera $e(t)$ et la voie B $u_R(t)$.



b. Représentation graphique de ces deux signaux

Lorsque la diode (supposée idéale) est passante, elle est équivalente à un court-circuit et $u_R(t) = e(t)$.
 Lorsqu'elle est bloquée, tout se passe comme si on pouvait la supprimer et $u_R(t) = 0$.
 La tension $u_R(t)$ est toujours positive.
 On parle de redressement simple alternance.



c. Valeur moyenne temporelle de $u_r(t)$

$$\langle u_r \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T u_R(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T/2} E_m \cdot \sin(\omega t) \cdot dt + 0$$

car $u_R(t) = 0$ entre $T/2$ et T .

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^{T/2} E_m \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = -\frac{E_m}{T \cdot \omega} [\cos(\omega t)]_0^{T/2} \quad \text{soit (avec } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{)} \quad \langle u_r \rangle = \frac{E_m}{\pi}$$

* Valeur efficace de $e(t)$

On définit la valeur efficace U_{eff} d'une tension sinusoïdale par la valeur d'une tension continue qui produit le même effet Joule dans une résistance donnée R :

La puissance dissipée par effet Joule dans R pour la tension continue U_{eff} est U_{eff}^2/R .

La puissance dissipée par effet Joule dans R pour la tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t)$ est

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{e(t)^2}{R} dt = \frac{E_m^2}{T \cdot R} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{E_m^2}{T \cdot R} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{E_m^2}{2 \cdot R}$$

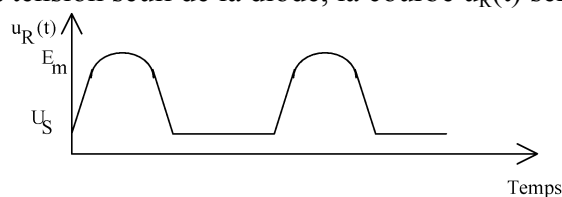
$$\text{D'où } \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{E_m^2}{2 \cdot R} \quad \text{soit} \quad U_{\text{eff}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

d. Diode réelle

La principale différence entre une diode réelle et la diode idéale est l'existence d'une tension seuil, U_S , tension positive (avec les conventions de signe du début) qu'il faut appliquer aux bornes de la diode réelle pour qu'un courant commence à la traverser. La tension seuil d'une diode au silicium est de l'ordre de 0,6 volt (0,3 V pour une diode au germanium).

Une deuxième différence est que, dans le sens passant, la diode réelle ne se comporte pas comme un court-circuit mais comme un résistor de résistance R_D (de l'ordre de quelques dizaines d'ohms pour une diode au silicium).

* En tenant compte de la tension seuil de la diode, la courbe $u_R(t)$ sera

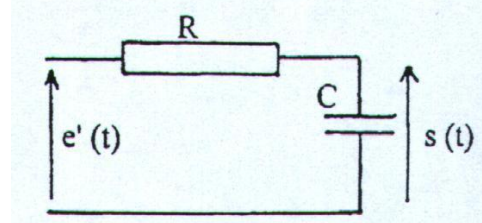


2.a Filtre

A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un court-circuit, et à basse fréquence comme un circuit ouvert. Le circuit sera un filtre passe-bas.

b. Le gain sera maximal en continu : tout se passe alors comme si le condensateur n'était pas présent et $s(t) = e'(t)$. Le gain est

$$H_{\max} = 1$$



* Gain

Ce circuit RC peut être considéré comme un pont diviseur de tension et

$$s = e' \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \underline{H(\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{et le gain} \quad H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

On retrouve $H_{\max} = 1$ pour $\omega = 0$.

* Bande passante

Par définition la bande passante correspond aux pulsations ω_0 telles que $\frac{H(\omega_0)}{H_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soit $\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\omega_0 = \pm \frac{1}{RC}$ mais une pulsation étant positive, nous

n'avons pour ce filtre passe-bas qu'une seule pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

La bande passante (en pulsation) est $\Delta\omega = \omega_0 - 0 = \frac{1}{RC}$

ou en fréquence $\Delta f = 2\pi\Delta\omega = \frac{2\pi}{RC}$

Application numérique : $R = 10 \text{ k}\Omega$ $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$

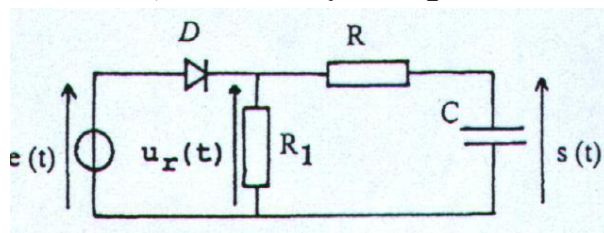
$$\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1} \quad \Delta\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1} \quad \Delta f = \Delta\omega/2\pi = 16 \text{ Hz}$$

$$\text{Gain : } H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3,948 \cdot 10^{-3} \cdot f^2}}$$

Fréquence (Hz)	0	100	200	400
Gain	1	0,15	0,079	0,039

c. On branche le filtre après le montage diode idéale, résistance R_1 envisagé en 1.

Le signal $u_r(t)$, tension aux bornes de R_1 , peut être considéré comme la superposition de sa valeur moyenne $\langle u_r \rangle$ et d'un grand nombre de termes harmoniques de pulsations successives $\omega, 2\omega, 4\omega \dots$, mais d'amplitudes décroissantes :



$$u_r(t) = \langle u_r \rangle + (E_m/2) \cdot \sin(\omega t) - (2E_m/(3\pi)) \cdot \cos(2\omega t) - (2E_m/(15\pi)) \cdot \cos(4\omega t) + \dots$$

Calculer, pour le signal de sortie $s(t)$, la valeur moyenne et l'amplitude des trois premières harmoniques, lorsque $\omega/2\pi = 100$ Hz et $E_m = 1$ V.

* valeur moyenne

$$\langle u_r \rangle = \frac{E_m}{\pi}$$

Elle a été calculée à la question 1.c :

* premier harmonique

Il correspond à la tension $e_1(t) = (E_m/2) \cdot \sin(\omega t)$ aux bornes de R_1 , c'est à dire à l'entrée du filtre passe-bas. A la sortie, l'amplitude de cet harmonique sera $A_1 = (E_m/2) \cdot H(\omega)$ soit

$$A_1 = \frac{E_m}{2\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

* deuxième harmonique

Il correspond à la tension $e_2(t) = (2 \cdot E_m/3 \cdot \pi) \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$ aux bornes de R_1 , c'est à dire à l'entrée du filtre passe-bas. A la sortie, l'amplitude de cet harmonique sera $A_2 = (2 \cdot E_m/3 \cdot \pi) \cdot H(\omega)$ soit

$$A_2 = \frac{2 \cdot E_m}{3 \cdot \pi \sqrt{1 + (2RC\omega)^2}}$$

* troisième harmonique

Il correspond à la tension $e_3(t) = (2 \cdot E_m/15 \cdot \pi) \cdot \cos(4 \cdot \omega \cdot t)$ aux bornes de R_1 , c'est à dire à l'entrée du filtre passe-bas. A la sortie, l'amplitude de cet harmonique sera $A_3 = (2 \cdot E_m/15 \cdot \pi) \cdot H(\omega)$ soit

$$A_3 = \frac{2 \cdot E_m}{15 \cdot \pi \sqrt{1 + (4RC\omega)^2}}$$

* Application numérique

$$E_m = 1 \text{ volt} \quad \omega = 200 \cdot \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$R = 10 \text{ k}\Omega \quad C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\langle u_r \rangle = 1/\pi = 0,32 \text{ volt} \quad A_1 = 0,078 \text{ V}$$

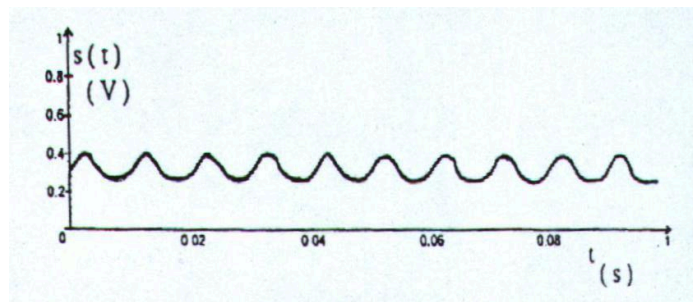
$$A_2 = 0,016 \text{ V}$$

$$A_3 = 0,0017 \text{ V}$$

* Signal $s(t)$ observé :

La valeur moyenne lue correspond bien à la valeur 0,32 V calculée précédemment.

En première approximation, on peut négliger A_2 , et a fortiori A_3 , devant A_1 , et la composante périodique du signal est sensiblement sinusoïdale, de fréquence 100 Hz et d'amplitude de l'ordre de 0,08 V.



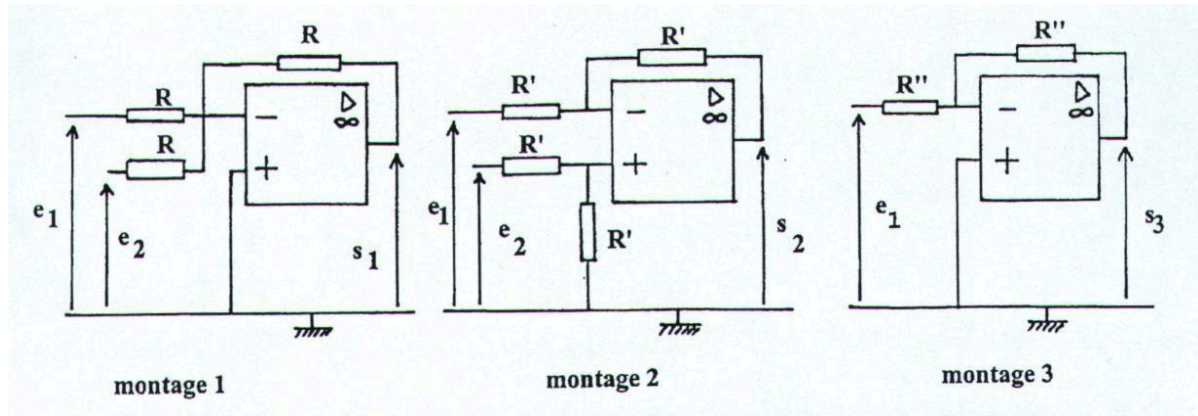
On le vérifie sur la courbe observée : la période est de 10 ms soit une fréquence de 100 Hz.

L'amplitude ne peut pas être lue avec précision, mais est bien de l'ordre de 0,07 à 0,08 V.

On peut considérer que le filtre passe-bas ne laisse passer que la composante continue et le premier harmonique de ce signal.

II. DIODE, EN MODE PASSANT, COMBINÉE AVEC UN AO IDÉAL, UTILISÉ DANS SON DOMAINE DE FONCTIONNEMENT LINÉAIRE

1. Dans les trois montages ci-dessous, on utilise un AO et des résistances.



* Montage 1 :

L'entrée non inverseuse étant reliée à la masse, et l'AO étant supposé idéal, A est une masse virtuelle et $V_A = 0$.

$$V_A = \frac{\frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R} + \frac{s_1}{R}}{3 \frac{1}{R}} = 0$$

D'autre part, l'application du théorème de Millman au noeud A s'écrit

d'où $s_1 = -(e_1 + e_2)$ l'opérateur est un sommateur inverseur.

* Montage 2 :

$$V_A = \frac{\frac{e_1}{R'} + \frac{s_2}{R'}}{2 \frac{1}{R'}}$$

Théorème de Millman en A :

$$V_B = \frac{\frac{e_2}{R'} + \frac{0}{R'}}{2 \frac{1}{R'}}$$

Théorème de Millman en B :

L'AO étant supposé idéal, la tension différentielle d'entrée est nulle d'où $V_A = V_B$ d'où

$s_2 = (e_2 + e_1)$ l'opérateur est un soustracteur.

* Montage 3 :

$V_A = 0$ pour les mêmes raisons que dans le montage 1 et le théorème de Millman

$$V_A = \frac{\frac{e_1}{R''} + \frac{s_3}{R''}}{2 \frac{1}{R''}} = 0$$

appliqué au noeud A donne

Soit $s_3 = -e_1$ l'opérateur est un inverseur.

2. Modèle de diode

$$I(V) = I_0 \cdot \left(e^{\frac{q \cdot V}{k_B \cdot T}} - 1 \right)$$

La diode est modélisée par :

a. L'argument de l'exponentielle est positif ($I > 0$ et $V > 0$ dans le sens passant) et croît avec V : pour une tension V suffisante on peut négliger 1 devant l'exponentielle, le modèle devenant

$$I(V) = I_0 \cdot e^{a \cdot V}$$

avec $a = \frac{q}{k_B T} = 38,90 \text{ V}^{-1}$ à 298 K

Dès que V dépassera 0,12 V l'exponentielle sera > 100 , et l'approximation est vérifiée à mieux que 1 % près.

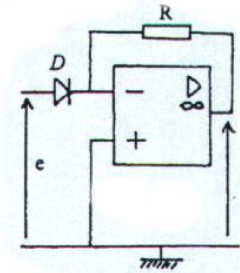
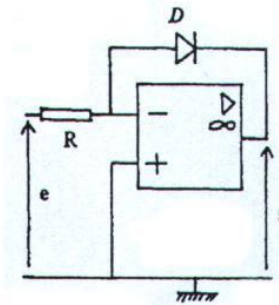
b. Relation liant s et e .

$V_A = 0$ (masse virtuelle) et la loi d'Ohm appliquée à R donne $I = e/R$. Avec le modèle de diode choisi

$$e = R \cdot I_0 \cdot e^{a \cdot V}$$

Si V est la tension aux bornes de la diode

$$s = -V = -\frac{1}{a} \text{Ln} \frac{e}{R \cdot I_0}$$



* La tension d'entrée e doit être positive et supérieure à la valeur calculée ci-dessus pour que la diode conduise et que le modèle choisi soit satisfaisant.

* Cet opérateur réalise la fonction logarithme (au signe près).

c. Relation liant s et e après avoir permuté R et D .

La tension aux bornes de la diode est e (car $V_A = 0$). Le courant traversant R est le même que

celui qui traverse la diode : $I = I_0 \cdot e^{a \cdot e}$

La loi d'Ohm appliquée à R s'écrit
$$I = \frac{V_A - V_S}{R} = \frac{-s}{R} = I_0 \cdot e^{a \cdot e}$$

soit

$$s = -R \cdot I_0 \cdot e^{a \cdot e}$$

* La condition sur e est la même que dans la question précédente.

* Cet opérateur réalise la fonction exponentielle (au signe près).

3. Réalisation d'un multiplieur

a. Branchons sur chacune des deux entrées d'un additionneur inverseur (montage 1) un opérateur "logarithme" de la question 2.b précédente.

La tension de sortie sera
$$s = -(s_1 + s_2) = -\left(-\frac{1}{a} \text{Ln} \frac{e_1}{R \cdot I_0} - \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{e_2}{R \cdot I_0}\right)$$

$$s = \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{e_1 \cdot e_2}{(R \cdot I_0)^2}$$

ou encore

b. Faisons suivre l'additionneur inverseur précédent d'un "exponentiateur inverseur" (question 2.a). La tension à la sortie de cet opérateur sera

$$s' = -R.I_0.e^{a.s} = -R.I_0.\exp a.\left(\frac{1}{a} \ln \frac{e_1.e_2}{(R.I_0)^2}\right) = -\frac{e_1.e_2}{R.I_0}$$

Il ne reste plus qu'à inverser s' grâce à l'inverseur (montage 3) pour obtenir finalement

$$s'' = \frac{e_1.e_2}{R.I_0}$$

On a réalisé un multiplieur, au facteur $1/R.I_0$ près.

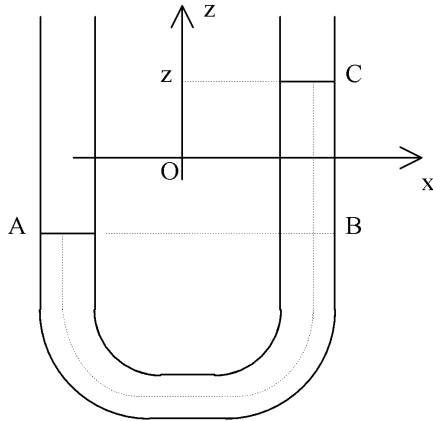
Remarque : Pour obtenir un multiplieur "vrai" il suffirait de remplacer l'inverseur final par un amplificateur de tension inverseur, de gain ajusté à $R.I_0$. et la tension de sortie serait alors

$$s''' = e_1.e_2$$

2^{ème} Partie

I. MOUVEMENTS D'UN LIQUIDE DANS UN TUBE EN U

1. Force de "rappel"



Si on néglige la force de frottement due à l'air et la viscosité du liquide, la seule force intervenant est celle due au fait que la colonne liquide n'est pas en équilibre hydrostatique. Le liquide sous le plan AB serait en équilibre s'il était seul : le déséquilibre est dû à la portion BC, de hauteur $2z$. La force correspondante n'est autre que le poids de cette partie du liquide :

$$\vec{F} = -2.\mu.g.S.z. \vec{u}_z$$

2. Conservativité de cette force

Une force est conservative s'il existe une fonction énergie potentielle E_p telle que

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p \quad \text{soit dans le cas d'un système unidimensionnel} \quad F = -\frac{dE_p}{dz} \quad (\text{si le paramètre est } z).$$

* Expression de l'énergie potentielle E_p associée à cette force :

$$E_p = -\int F(z).dz + \text{cste} \quad E_p = 2\mu g S \int z.dz + \text{cste}$$

Si on choisit arbitrairement cette énergie nulle pour $z = 0$, la constante d'intégration est nulle et l'énergie potentielle a pour expression

$$E_p = \mu.g.S.z^2$$

3. Énergie cinétique E_C de la colonne

Tous les points de la colonne liquide ont la même vitesse $\dot{z}$ point, et l'énergie cinétique est

$$E_C = \frac{1}{2} \mu.S.L.\dot{z}^2$$

(la masse du liquide étant égale à μSL)

4. Equation différentielle

L'énergie mécanique E_m du liquide est constante $E_m = E_p + E_C = \text{cste}$

$$E_m = \mu \cdot g \cdot S \cdot z^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot S \cdot L \cdot \dot{z}^2$$

* Dérivons l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps

$$2 \cdot g \cdot S \cdot z \cdot \dot{z} + S \cdot L \cdot \dot{z} \cdot \ddot{z} = 0$$

Comme $\dot{z}$ n'est pas nulle dans le cas général, on peut simplifier

$$\ddot{z} + \frac{2 \cdot g}{L} z = 0$$

* L'équation est de la forme

$$\ddot{z} + \omega^2 \cdot z = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation

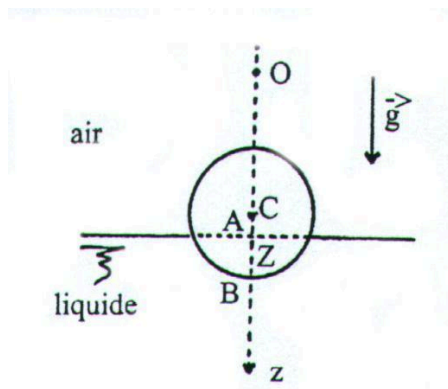
$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{L}} \quad \text{ou de période} \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot L}{g}}$$

Remarque : si on réalise l'expérience, on observe un amortissement rapide des oscillations. Il y a dissipation d'énergie par frottements fluides sur les parois du tube et également au niveau des surfaces libres en contact avec l'air de l'atmosphère.

5. Application numérique : $L = 40 \text{ cm}$ et $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

$$T = 0,897 \text{ s}$$

II. MOUVEMENTS VERTICAUX D'UNE SPHÈRE A LA SURFACE D'UN LIQUIDE AU REPOS



1. Volume de la partie immergée

Le volume de la partie immergée est donné

$$\pi \cdot Z^2 \cdot \left(R - \frac{Z}{3} \right)$$

par l'expression

Pour $Z = 2R$, la sphère est alors complètement immergée et le volume immergé est égal au volume de la sphère :

$$\pi \cdot (2R)^2 \cdot \left(R - \frac{2R}{3} \right) = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

2. Équilibre de la sphère

La sphère est soumise :

- à son poids, vertical descendant, de module $\mu_s \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$
- à la poussée d'Archimède due au liquide, verticale ascendante, de module

$$\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z^2 \cdot \left(R - \frac{Z}{3} \right)$$

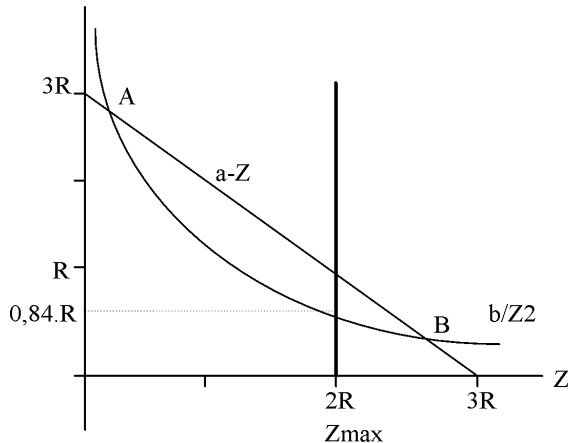
- à la poussée d'Archimède due à l'air. Nous négligeons cette dernière devant la précédente.

A l'équilibre mécanique, les modules des deux forces sont égaux :

$$\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z^2 \cdot \left(R - \frac{Z}{3}\right) = \mu_S \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \quad \text{ou} \quad (3R - Z) = \frac{\mu_S}{\mu_L} \cdot \frac{4 \cdot R^3}{Z^2} \quad (*)$$

qui est bien de la forme $(a - Z) = \frac{b}{Z^2}$ avec $a = 3R$ et $b = \frac{\mu_S}{\mu_L} \cdot 4 \cdot R^3$

3. Racine de l'équation précédente



* Traçons $a - Z = 3R - Z$: c'est une droite de pente - 1.

* Traçons $b/Z^2 = 3,36 \cdot R^3/Z^2$ avec $\mu_L = 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $\mu_S = 840 \text{ kg/m}^3$.

* Les valeurs de Z racines de (*) sont les intersections A et B des deux courbes précédentes.

* Mais Z ne peut pas prendre de valeurs supérieures à $2R$, sinon la sphère serait totalement immergée. La racine B n'a pas de sens physique. La seule position d'équilibre possible correspond au point A de la figure ci-contre.

* Expression approchée de la racine

Trouver, en fonction de R , l'expression approchée de cette valeur, qu'on notera Z_0 .

Z_0 a les dimensions d'une longueur donc est de la forme $Z_0 = \alpha R$.

4. Équation différentielle des petits mouvements de la sphère

a. Résultante des forces :

* A l'équilibre, la somme des forces appliquées à la sphère est nulle

$$-\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z_0^2 \cdot \left(R - \frac{Z_0}{3}\right) + \mu_S \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = 0$$

* Si la sphère est déplacée verticalement de ε de cette position d'équilibre (soit $\varepsilon = Z - Z_0$), la force subie par la sphère s'écrit

$$F = -\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot (Z_0 + \varepsilon)^2 \cdot \left(R - \frac{(Z_0 + \varepsilon)}{3}\right) + \mu_S \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

$$Z_0 + \varepsilon = Z_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{Z_0}\right)$$

On écrit et on donne une expression approchée de $(Z_0 + \varepsilon)^2$

$$(Z_0 + \varepsilon)^2 = Z_0^2 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{Z_0}\right)^2 = Z_0^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \varepsilon}{Z_0}\right)$$

d'où l'expression de la force F :

$$F = -\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z_0^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \varepsilon}{Z_0}\right) \cdot \left(R - \frac{(Z_0 + \varepsilon)}{3}\right) + \mu_S \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

$$F = -\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z_0^2 \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2 \cdot R \cdot \varepsilon}{Z_0} - \frac{2 \cdot \varepsilon}{3} - \frac{2 \cdot \varepsilon^2}{3 \cdot Z_0}\right) - \mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z_0^2 \cdot \left(R - \frac{Z_0}{3}\right) + \mu_S \cdot g \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

et en ne conservant que les termes du premier ordre en ε

$$F = -\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot Z_0^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot R}{Z_0} - 1 \right) \cdot \varepsilon \quad \text{ou} \quad F = -\mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot \alpha^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot R}{\alpha} - 1 \right) \cdot \varepsilon$$

$$k = \mu_L \cdot g \cdot \pi \cdot \alpha^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right)$$

qui est de la forme $F = -k \cdot \varepsilon$ avec

On établira une relation approchée en utilisant le résultat de la question 3. et on exprimera k en fonction de R , μ_s et g uniquement.

b. Accélération du point C :

La cote du centre C de la sphère est, à un instant donné $Z_C = Z - R$ (l'axe vertical étant orienté vers le bas), ou $Z_C = (Z_0 + \varepsilon) - R$.

D'où $\ddot{Z}_C = \ddot{\varepsilon}$

c. Équation différentielle

Le Principe fondamental de la dynamique appliqué à C, affecté de la masse de la sphère, et subissant la force $-k \cdot \varepsilon$ s'écrit

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu_s \cdot R^3}{3} \ddot{\varepsilon} = -k \cdot \varepsilon$$

Ou $\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \cdot \varepsilon = 0$ avec $\omega^2 = \frac{3 \mu_L}{4 \mu_s} \cdot \frac{g \cdot \alpha^2}{R} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right)$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω .

d. Période des oscillations

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 4 \pi \sqrt{\frac{R}{3 \cdot g \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\mu_L}{\mu_s} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right)}}$$

Application numérique : avec $R = 1 \text{ cm}$ et $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

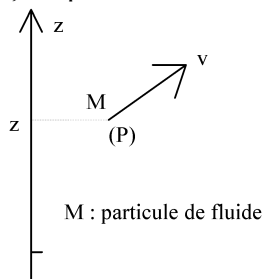
III. ÉCOULEMENTS DU LIQUIDE

On considère un liquide, incompressible, homogène, non visqueux, en écoulement stationnaire et irrotationnel, dans le champ de pesanteur supposé uniforme.

1. Équation de Bernoulli

Pour un fluide incompressible, parfait (viscosité négligeable) en écoulement permanent

irrotationnel, la quantité $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g \cdot z$ a la même valeur en tout point de l'écoulement.



v : vitesse du fluide

P : pression du fluide

z : cote du point où l'on se place.

* Interprétation énergétique :

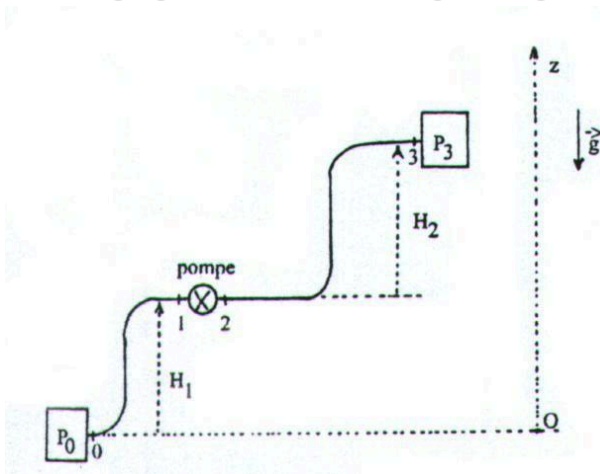
$\frac{v^2}{2}$: énergie cinétique de l'unité de masse de fluide

$\frac{P}{\mu}$: les forces pressantes s'exerçant sur la surface d'une particule de fluide sont des forces surfaciques par définition. Mais on montre qu'elles sont équivalentes à un champ de force

volumique $\vec{dF} = -\vec{\text{grad}}(P).dV$. $\frac{P}{\mu}$ est alors interprété comme une énergie potentielle associée à ce champ de force.

$g.z$: énergie potentielle de pesanteur.

2. On se propose d'utiliser cette équation, pour interpréter de façon simplifiée, les



caractéristiques d'une pompe de vidange. Cette pompe aspire de l'eau (masse volumique : $\mu_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$) contenue dans une enceinte inférieure à la pression P_0 , et la refoule dans une enceinte supérieure à la pression P_3 . H_1 est la hauteur d'aspiration et H_2 celle de refoulement. On désigne par 0, 1, 2, 3 les points des conduites où les pressions valent P_0, P_1, P_2, P_3 , les vitesses v_0, v_1, v_2, v_3 (v_0 est négligeable par rapport aux autres vitesses) ; la pompe fonctionne en régime permanent (débit constant).

a. Énergie mécanique massique apportée par la pompe

Si on note D_v le débit volumique de la pompe, l'énergie reçue par le liquide est, par unité de temps $(P_2 - P_1).D_v = \eta.P_m$ (III-1)

η étant le rendement en puissance de la pompe et P_m la puissance nominale de la pompe.

* D'autre part, on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre les points 0 et 1 :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} + g.z_0 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} + g.z_1$$

soit avec $v_0 = 0$ (vitesse dans le bassin inférieur négligeable devant les autres vitesses), et $z_0 = 0$ (origine des altitudes) :

$$P_1 = P_0 - \mu \frac{v_1^2}{2} - \mu.g.H_1$$

* De même le théorème de Bernoulli entre les points 2 et 3 s'écrit :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu} + g.z_2 = \frac{v_3^2}{2} + \frac{P_3}{\mu} + g.z_3$$

soit avec $z_2 = z_1$ (l'entrée et la sortie de la pompe étant à la même altitude) :

$$P_2 = P_3 + \mu \frac{v_3^2}{2} - \mu \frac{v_2^2}{2} + \mu.g.H_2$$

En remplaçant dans la relation III-1 P_1 et P_2 par les expressions précédentes, il vient

$$P_m \cdot \eta = \left(P_3 + \mu \frac{v_3^2}{2} - \mu \frac{v_2^2}{2} + \mu \cdot g \cdot H_2 - (P_0 - \mu \frac{v_1^2}{2} - \mu \cdot g \cdot H_1) \right) \cdot D_v$$

$\mu \cdot D_v$ étant la masse de liquide traversant la pompe par unité de temps, l'énergie massique reçue par le liquide est

$$\frac{P_m \cdot \eta}{\mu \cdot D_v} = \frac{1}{\mu} (P_3 - P_0) + g \cdot (H_1 + H_2) + \frac{v_3^2}{2} \quad (\text{III-2})$$

b. Dénivellation théorique entre les niveaux 0 et 3

La dénivellation maximale théorique ΔH_{th} est égale à $H_1 + H_2$. Avec $P_3 = P_0 = P_{atm}$ la relation III-2 s'écrit

$$\Delta H_{th} = (H_1 + H_2) = \frac{P_m \cdot \eta}{\mu \cdot g \cdot D_v} - \frac{v_3^2}{2 \cdot g}$$

D'autre part la vitesse $v_3 = v_2$ du liquide dans la conduite 2-3 peut s'exprimer en fonction du

débit volumique D_v :

$$D_v = S \cdot v_3 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot v_3$$

$$\Delta H_{th} = \frac{P_m \cdot \eta}{\mu \cdot g \cdot D_v} - \frac{8 \cdot D_v^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^4}$$

d'où

Application numérique : $\Delta H_{th} = 7,2$ mètres

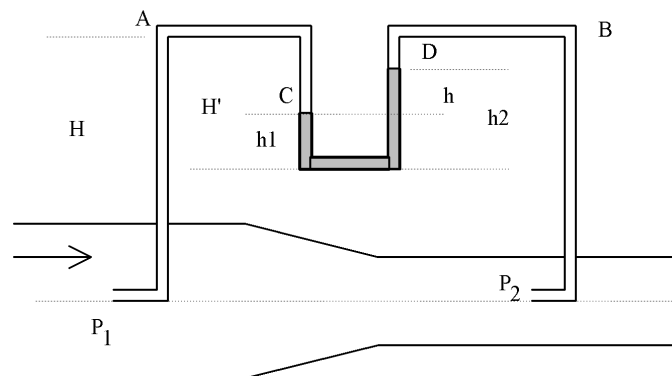
c. Comparaison avec la valeur réelle

La dénivellation réelle, de 6 mètres, est plus petite que la dénivellation théorique. En effet il y a une perte de charge dans les canalisations : de l'énergie est dissipée (transformation en chaleur) par frottements fluides au sein du liquide (le liquide a en réalité une viscosité non nulle) et sur les parois.

3. Mesure du débit d'une pompe

3.a. Colonne de mercure

Pour un fluide incompressible, en écoulement permanent et irrotationnel dans une canalisation, la vitesse augmente lorsque l'aire de la section droite de la canalisation diminue et la pression augmente. Dans le Venturi, la pression P_2 est plus faible que la pression P_1 . La hauteur de mercure sera plus grande du côté de la prise de pression de la section 2. D'où la figure :



Le mercure est en grisé sur la figure, le reste du tube étant rempli d'eau.

3.b. Expression du débit

* Le théorème de Bernoulli, appliqué entre le point de la section 1, sur l'axe du Venturi et le point de la section 2 sur ce même axe, s'écrit

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu_{\text{eau}}} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu_{\text{eau}}} \quad \text{ou} \quad P_1 - P_2 = \frac{\mu_{\text{eau}}}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

D'autre part, l'eau étant incompressible, le débit volumique D_v est conservatif, ce qui s'écrit ici

$$D_v = S_1 \cdot v_1 = \pi \cdot (d_1/2)^2 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = \pi \cdot (d_2/2)^2 \cdot v_2$$

et permet d'exprimer les vitesses en fonction du débit volumique et des diamètres du Venturi :

$$v_1 = \frac{4 \cdot D_v}{\pi \cdot d_1^2} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{4 \cdot D_v}{\pi \cdot d_2^2}$$

La différence des pressions peut être exprimée en fonction du débit :

$$P_1 - P_2 = \frac{16 \cdot \mu_{\text{eau}}}{2 \cdot \pi^2} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right) D_v^2 \quad \text{soit} \quad D_v = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\mu_{\text{eau}} \cdot \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right)}}$$

* Si on peut mesurer la différence des pressions, on accède ainsi au débit. C'est le rôle des tubes manométriques.

La section du tube manométrique étant supposée petite devant sa longueur, la pression est la même en tout point d'une section de ce tube. Dans tout le tube, les liquides sont étant au repos, on peut appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique.

Avec les notations de la figure ci-dessus :

$$P_1 = P_A + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot H$$

$$P_2 = P_B + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot H$$

$$P_1 - P_2 = (P_A + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot H) - (P_B + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot H) = P_A - P_B$$

D'autre part :

$$P_C = P_A + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot (H' - h_1) \quad \text{et} \quad P_D = P_B + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot (H' - h_2)$$

$$\text{ou} \quad P_A - P_B = (P_C - P_D) + \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = (P_C - P_D) - \mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot h$$

et enfin

$$P_C = P_D + \mu_{\text{Hg}} \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = P_D + \mu_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h \quad \text{ou} \quad P_C - P_D = \mu_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h$$

Soit en définitive

$$P_1 - P_2 = P_A - P_B = -\mu_{\text{eau}} \cdot g \cdot h + \mu_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h = (\mu_{\text{Hg}} - \mu_{\text{eau}}) \cdot g \cdot h$$

Finalement le débit volumique s'exprime par

$$D_v = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot (\mu_{\text{Hg}} / \mu_{\text{eau}} - 1) \cdot g \cdot h}{\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right)}}$$

3.c. Application numérique

$h = 50 \text{ cm}$, $d_1 = 70 \text{ cm}$, $d_2 = 50 \text{ cm}$ et $\mu_{\text{Hg}} / \mu_{\text{eau}} = 13,6$.

$$D_v = 0,738 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 738 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

* Ce dispositif ne serait pas bien adapté pour mesurer le débit de la pompe étudiée dans la question 2, car les ordres de grandeur des deux débits ne sont pas les mêmes. De plus la conduite de refoulement de la pompe a un diamètre de 15 mm, beaucoup plus petit que celui du Venturi étudié ici (70 cm).