

13 група

Урок №32

**Тема уроку: Розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь**

[https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas\\_2/34.html](https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas_2/34.html)-конспект уроку

**Відео <https://www.youtube.com/watch?v=IWnIYxhaVxU>**- Більш складні тригонометричні рівняння Пояснення

Урок №33

**Тема уроку: РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

[https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas\\_2/35.html](https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas_2/35.html)-конспект уроку

**Відео <https://www.youtube.com/watch?v=N9F1LGxZ8Gs>**- 20 Більш складні тригонометричні рівняння Практика

Урок №34

Тема уроку: Узагальнення знань. Підготовка до ЗНО

<https://www.youtube.com/watch?v=X151FCSW-fg>- Підготовка до ЗНО. Розв'язання прикладів

Урок №35

**Тема уроку: КОНТРОЛЬНА РОБОТА**

[https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas\\_2/36.html](https://subject.com.ua/lesson/mathematics/10klas_2/36.html)

#### **Урок №64**

Тема уроку: Вимірювання відстаней у просторі: від прямої до площини, між площинами

Мета: сформулювати поняття відстані від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами. Розвивати графічні здібності, логічне мислення, математичну мову, уяву. Виховувати любов до математики.

Тип уроку: засвоєння нових знань і вмінь.

Обладнання та наочність: таблиця.

#### **ХІД УРОКУ**

I. Організаційний етап.

II. Перевірка домашнього завдання.

*2. Виконання тестових завдань із подальшою самоперевіркою і самооцінюванням*

*Варіант 1*

1) Із точки А до площини а проведено похилу АВ. Знайдіть довжину проекції цієї похилої на площину а, якщо  $AB = 26$  см, а відстань від точки А до площини а дорівнює 10

см.

А. 26 см. Б. 16 см. В. 24 см. Г.  $\sqrt{776}$  см.

2) Через точку О перетину діагоналей квадрата проведено перпендикуляр КО до площини квадрата. Знайдіть відстань від точки К до сторін квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см, а відстань від точки К до площини квадрата дорівнює  $5\sqrt{2}$  см.

А. 10 см. Б.  $5\sqrt{3}$  см. В. 100 см. Г. 50 см.

### *Варіант 2*

1) Із точки М до площини  $\alpha$  проведено похилу MN. Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції на площину  $\alpha$  дорівнює 8 см, а точка М віддалена від площини  $\alpha$  на 6 см.

А. 10 см. Б. 6 см. В. 100 см. Г. 50 см.

2) Через точку О перетину діагоналей квадрата проведено перпендикуляр КО до площини квадрата. Знайдіть сторону квадрата, якщо відстань від точки К до площини квадрата дорівнює 12 см, а до сторін квадрата — 20 см.

А. 16 см. Б. 20 см. В. 32 см. Г. 18 см.

### *Відповіді*

Варіант 1. 1) В. 2) Б.

Варіант 2. 1) А. 2) В.

## III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

### *Фронтальне опитування*

1. Сформулюйте означення паралельних прямих у просторі. Наведіть приклади паралельних прямих у навколишньому середовищі.

2. Бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см, основи — 3 см і 9 см. Знайдіть відстань між основами цієї трапеції.

3. Сформулюйте означення мимобіжних прямих. Наведіть приклади мимобіжних прямих у навколишньому середовищі.

4. Сформулюйте означення і наведіть приклади в навколишньому середовищі:

а) паралельних прямої і площини; б) паралельних площин.

## IV. ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

### План вивчення теми

1. Відстань від прямої до паралельної площини.
  2. Відстань між площинами.
  3. Відстань між паралельними прямими.
  4. Відстань між мимобіжними прямими.
  5. Приклади знаходження зазначених відстаней:
- 

### V. ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ І СПОСОБІВ ДІЙ

Робота з підручником Г.П.Бевз, В.Г.Бевз Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. 10 клас. стор. 234-240

### VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

1. Робота з підручником  
Розв'язування задач

1148. Дано:  $AK \perp (ABC)$ ;  $\triangle ABC$ ;  $AB = 13$  см;  
 $BC = 14$  см;  $AC = 15$  см;  $AK = 16$  см;  $KM \perp BC$ .  
Знайти:  $KM$ .

Розв'язання. Знайдемо  $S_{\triangle ABC}$  за формулою Герона.

$$\text{Півпериметр } p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ (см).}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM.$$

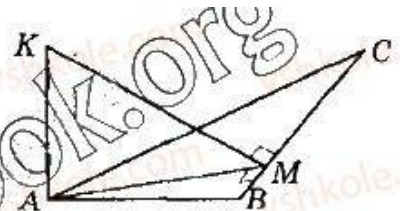
Знайдемо висоту  $\triangle ABC$ , проведену до сторони  $BC$ :

$$AM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \text{ (см).}$$

З  $\triangle AKM$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора  $KM^2 = AM^2 + AK^2$ ;

$$KM = \sqrt{AM^2 + AK^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ (см).}$$

Відповідь: 20 см.



1155. Дано:  $AC$  і  $AD$  — похилі;  $AB \perp \alpha$ ; т.  $C \in \alpha$ ; т.  $D \in \alpha$ ;  $AC = 17$  м;  $AD = 10$  м;  $CB - BD = 9$  м. Знайти:  $AB$ .

Розв'язання. Нехай довжина  $CB$  дорівнює  $x$  м, тоді довжина  $BD$  дорівнює  $(x - 9)$  м.

З  $\triangle ABC$  за теоремою Піфагора:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ;  $AB^2 = AC^2 - BC^2$  (1).

З  $\triangle ABD$  за теоремою Піфагора:

$AD^2 = BD^2 + AB^2$ ;  $AB^2 = AD^2 - BD^2$  (2).

(1) = (2). Звідси маємо:  $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ .

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$17^2 - x^2 = 10^2 - (x - 9)^2$ ;  $289 - x^2 = 100 - x^2 + 18x - 81$ ;  $18x = 289 - 100 + 81$ ;

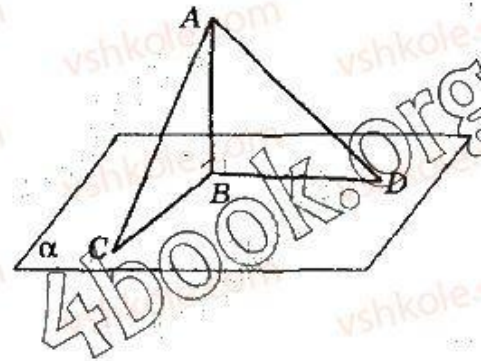
$18x = 270$ ;  $x = 15$ ,  $CB = 15$  см. Тоді  $BD = 15 - 9 = 6$  (см).

Повернемося до рівності (1).

$AB^2 = AC^2 - BC^2$ ;

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17 - 15)(17 + 15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$  (см).

Відповідь: 8 см.



## VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, РЕФЛЕКСІЯ

## VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Завдання за підручником: \_ст234-240 №№1150,1157

2. Додаткове завдання. Доведіть, що відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними площинами, що містять ці прямі.

## Урок № 65

Тема уроку: Розв'язування задач

Мета уроку: узагальнити знання учнів із теми «Відстані в просторі»; удосконалити вміння розв'язувати задачі з цієї теми; прагнути до вдосконалення результатів своєї діяльності;

Тип уроку: узагальнення і вдосконалення знань.

Обладнання та наочність:

Хід уроку

## I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

## II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Перевірка завдання, заданого за підручником

## III. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ

### Фронтальне опитування

1. Яке слово є ключовим у всіх означеннях відстаней у просторі?
2. Сформулюйте означення відстані:
  - 1) від точки до прямої; 2) від точки до площини; 3) від прямої до паралельної площини; 4) між паралельними площинами; 5) між паралельними прямими; 6) між мимобіжними прямими.
3. Проілюструйте кожне з означень на відповідних моделях або предметах навколишнього середовища.

## IV. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

### 1. Робота з підручником

**1159.** Дано:  $ABCD$  — квадрат;  $AA_1 \perp \alpha$ ;  $BB_1 \perp \alpha$ ;  $CC_1 \perp \alpha$ ;  $DD_1 \perp \alpha$ ;  $AC \cap BD = O$ ;  $OO_1 \perp \alpha$ ;  $AA_1 = 13$  м,  $BB_1 = 14$  м,  $CC_1 = 17$  м.

Знайти:  $DD_1$  і  $OO_1$ .

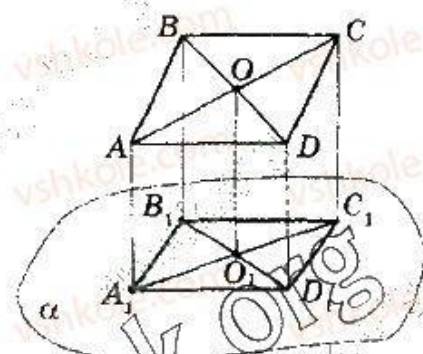
Розв'язання.  $AO = OC$  і  $BO = OD$  за властивістю діагоналей паралелограма. Тоді  $A_1O_1 = O_1C$  за теоремою Фалеса ( $AA_1 \parallel OO_1 \parallel CC_1$ ) і  $B_1O = O_1D$  ( $BB_1 \parallel OO_1 \parallel CC_1$ ). Отже,  $OO_1$  — середня лінія трапецій  $A_1ACC_1$  і  $B_1BDD_1$ . За властивістю середньої лінії трапеції  $A_1ACC_1$

$$OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{13 + 17}{2} = 15 \text{ (м)}.$$

За властивістю середньої лінії трапеції  $B_1BDD_1$ ,  $OO_1 = \frac{BB_1 + DD_1}{2}$ ,

тоді  $DD_1 = 2OO_1 - BB_1 = 2 \cdot 15 - 14 = 30 - 14 = 16$  (м).

Відповідь: 15 м і 16 м.



1162. Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AA_1 \perp \alpha$ ;  $BB_1 \perp \alpha$ ;  $CC_1 \perp \alpha$ ;  $OO_1 \perp \alpha$ ;  
 $AA_1 = 40$  см;  $BB_1 = 24$  см;  $OO_1 = 38$  см.  
 $AM_1$ ,  $CM_2$  — медіани  $\triangle ABC$ ;  $AM_1 \cap CM_2 = O$ .  
 Знайти:  $CC_1$ .

Розв'язання.  $M_2N_2$  — середня лінія трапеції  $A_1ABB_1$ .

$$M_2N_2 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{40 + 24}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ (см)}.$$

Проведемо  $O_2O_3 \parallel OO_1$  так, щоб  $M_2O = OO_2 = O_2C$ .

Розглянемо трапецію  $N_2M_2CC_1$ :  $OO_1$  — середня лінія

$$\text{трапеції } N_2M_2O_2O_3. \quad OO_1 = \frac{N_2M_2 + O_2O_3}{2},$$

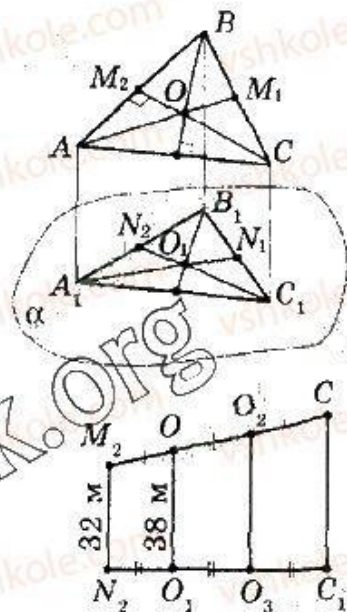
$$\text{тобто } O_2O_3 = 2OO_1 - N_2M_2 = 2 \cdot 38 - 32 = 44 \text{ (м)}.$$

$O_2O_3$  — середня лінія трапеції  $O_1OCC_1$ .

$$O_2O_3 = \frac{OO_1 + CC_1}{2};$$

$$CC_1 = 2O_2O_3 - OO_1 = 2 \cdot 44 - 38 = 88 - 38 = 50 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 50 м.

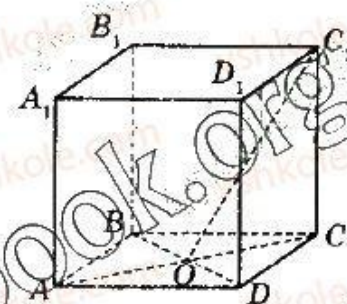


1170. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;  $AB = a$ .

Знайти: відстань між  $BD$  і  $CC_1$ .

Розв'язання. Відстанню між мимобіжними прямими  $BD$  і  $CC_1$  є довжина спільного перпендикуляра  $CO$  (т.  $O$  — точка перетину діагоналей). Дійсно,  $CO \perp BD$  за властивістю діагоналей квадрата;  $CC_1 \perp (ABC)$ , а значить,  $CC_1 \perp AC$ , оскільки  $AC \subset (ABC)$ .

$$OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot AB\sqrt{2} = \frac{1}{2} a\sqrt{2}. \text{ Відповідь: } \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



## V. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

### . Самостійна робота

#### Варіант 1

1) Пряма  $CD$  перпендикулярна до площини гострокутного трикутника  $ABC$ ,  $CK$  — його висота.

а) Доведіть, що прямі  $DK$  і  $AB$  взаємно перпендикулярні.

б) Знайдіть відстань від точки  $A$  до площини  $DKC$ , якщо відстань від точки  $D$  до прямої  $AB$  дорівнює 1 см,  $\angle DAK = 45^\circ$ .

2) Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні. Рівносторонній трикутник  $ABC$  лежить у площині  $\alpha$  так, що сторона  $AB$  належить прямій перетину площин. Пряма  $b$ , паралельна прямій перетину площин, лежить у площині  $\beta$  і віддалена від неї на 4 см. Обчисліть відстань від точки  $C$  до прямої  $b$ , якщо  $AB = 2\sqrt{3}$  см.

## Варіант 2

1) Діагоналі чотирикутника ABCD перетинаються в точці О. Із точки О проведено перпендикуляр ОМ до прямої АВ і перпендикуляр ОК до площини чотирикутника.

а) Доведіть, що кут між прямими МК і АВ прямий.

б) Знайдіть відстань від точки В до площини ОКМ, якщо відстань від точки К до прямої АВ дорівнює  $\sqrt{3}$  см,  $\angle MKB = 30^\circ$ .

2) Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні. Рівнобедрений трикутник ABC лежить у площині  $\alpha$  так, що його основа АВ належить прямій перетину площин. Пряма b, паралельна прямій перетину площин, лежить у площині  $\beta$  і віддалена від неї на 5 см. Обчисліть відстань від точки С до прямої b, якщо АВ = 32 см, АС = 20 см.

## Відповіді

Варіант 1. 1) б) 1 см. 2) 5 см.

Варіант 2. 1) б) 1 см. 2) 13 см.

## VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, РЕФЛЕКСІЯ

## VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Завдання за підручником: ст..234-240, №№1160,1163

2. Додаткове завдання. Точка М віддалена від кожної з вершин прямокутника на відстань а, а від його площини — на відстань b. Знайдіть площу прямокутника, якщо відношення його сторін дорівнює двом.

Відповідь.  $1,6(a^2 - b^2)$ .

## Урок №66

Тема уроку: Вимірювання кутів у просторі

Мета уроку: узагальнити поняття кута між прямими в просторі, що перетинаються, кута між площинами; сформулювати поняття кута між прямою і площиною, між мимобіжними прямими; сформулювати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання цих понять;

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

### I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

### II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Перевірка завдання, заданого за підручником

2. Розв'язування задач

№ 1. Через вершину квадрата ABCD проведено пряму АМ, перпендикулярну до його площини. Обчисліть відстань між прямими АМ і BD, якщо сторона квадрата дорівнює 12 см.

№ 2. Через вершину В тупого кута ромба ABCD проведено пряму ВМ, перпендикулярну до його площини. Обчисліть відстань між прямими ВМ і AD, якщо гострий кут ромба дорівнює  $45^\circ$ , а його сторона — 10 см.

№ 3. Через точку О — середину гіпотенузи АВ прямокутного трикутника ABC

проведено пряму  $OM$ , перпендикулярну до його площини. Обчисліть відстань між прямими  $OM$  і  $AC$ , якщо  $AB = 24$  см,  $AC = 18$  см.

№ 4. Через точку  $O$  перетину діагоналей прямокутника  $ABCD$  проведено пряму  $OM$ , перпендикулярну до його площини. Обчисліть відстань між прямими  $OM$  і  $AB$ , якщо  $BD = 13$  см,  $AB = 5$  см.

### III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

*Виконання усних вправ*

1.  $ABCD$  — квадрат,  $DM$  — перпендикуляр, проведений до площини квадрата. Назвіть проєкції прямих  $MC$ ,  $MB$ ,  $MA$  на площину квадрата.

2. Точка  $D$  не лежить у площині трикутника  $ABC$  і рівновіддалена від усіх його вершин. Точка  $O$  — центр кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . Назвіть проєкції прямих  $DA$ ,  $DB$  і  $DC$  на площину трикутника.

### IV. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ

*План вивчення теми*

1. Кут між двома прямими простору, що перетинаються.
2. Кут між паралельними прямими.
3. Кут між мимобіжними прямими.
4. Кут між прямою і площиною.
5. Кут між площинами.
6. Ілюстрації та приклади знаходження кутів у просторі на відповідних моделях і предметах навколишнього середовища:

### V. ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ І СПОСОБІВ ДІЙ

*Робота з підручником Г.П.Бевз, В.Г.Бевз Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. 10 клас. стор. 241-244*

### VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

1. Робота з підручником

**1191.** Дано: т.  $A \in \alpha$ ;  $AB \perp \alpha$ ; т.  $B \in \alpha$ ; т.  $C \in \alpha$ ;  $AB = 2BC$ .

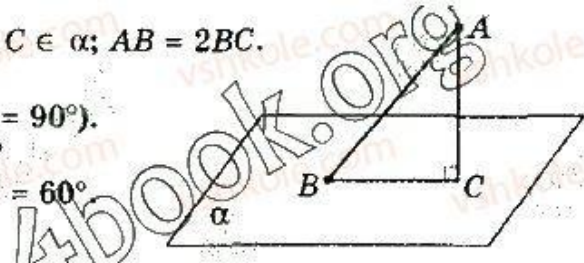
**Знайти:**  $\angle ABC$ .

**Розв'язання.**  $\triangle ABC$  — прямокутний ( $\angle C = 90^\circ$ ).

За властивістю катета навпроти кута  $30^\circ$

$AB = 2BC$ . Отже,  $\angle BAC = 30^\circ$ , тоді  $\angle ABC = 60^\circ$

**Відповідь:**  $60^\circ$ .



2. Робота в групах

Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу і відповідатиме за її кінцевий результат. Складіть план роботи. Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме. Розв'яжіть задачі. Обговоріть здобуті розв'язання. Здайте роботи вчителю на перевірку.

*Задача 1*

Пряма  $MA$  перпендикулярна до сторін  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$ . Знайдіть кут між прямими  $MA$  і  $BC$ .

*Задача 2*

Точка  $M$  віддалена від площини квадрата  $ABCD$  на 4 см, а від усіх його сторін на  $2\sqrt{6}$  см. Знайдіть кут між прямою  $AM$  і площиною квадрата.

*Задача 3*

Точка  $P$  віддалена від усіх сторін правильного трикутника  $ABC$  на  $2\sqrt{3}$  см. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $BSP$ , якщо сторона трикутника дорівнює 6 см.

### VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, РЕФЛЕКСІЯ

### VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Завдання за підручником: ст. 243-245, №№ 1192, 1194

2. Додаткове завдання.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямокутний паралелепіпед, у якому  $AB = 6$  см,  $AD = 8$  см,  $AA_1 = 3$  см, точка  $M$  — середина ребра  $AD$ . Знайдіть косинус кута між прямими  $MD_1$  і  $A_1 C_1$ .

Відповідь.  $16/25$ .

Урок 67

Тема уроку: Розв'язування задач.

Мета уроку: удосконалити вміння розв'язувати задачі на застосування поняття кутів у просторі; аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності;

Тип уроку: удосконалення знань і вмінь.

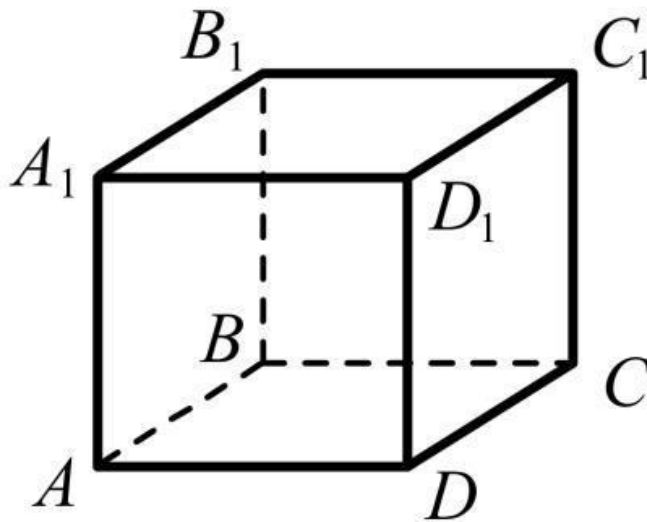
Хід уроку

## I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

## II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Перевірка завдання, заданого за підручником 2. Математичний диктант із подальшою самоперевіркою і самооцінюванням

На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .



Скориставшись рисунком, назвіть:

- 1) кут між прямою  $D_1 B$  і площиною  $ABC$ ;
- 2) кут між прямою  $D_1 C$  і площиною  $ADD_1$ ;

- 3) кут між прямими  $D_1B$  і  $AD$ ;
- 4) кут між прямими  $D_1C$  і  $AB$ ;
- 5) кут між площинами  $A_1BC$  і  $ABC$ ;
- 6) кут між площинами  $ADD_1$  і  $DCC_1$ .

*Відповіді*

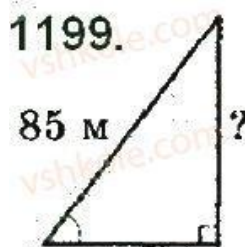
- 1)  $\angle D_1BD$ ; 2)  $\angle DD_1C$ ; 3)  $\angle A_1D_1B$ ; 4)  $\angle D_1CD$ ; 5)  $\angle A_1BA$  або  $\angle D_1CD$ ; 6)  $\angle ADC$  або  $\angle A_1D_1C_1$ .

### III. УДОСКОНАЛЕННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

- 1) Із поданої точки до поданої площини проведені дві рівні похилі. Кут між похилими дорівнює  $60^\circ$ , а кут між їх проекціями прямий. Доведіть, що кожна з цих похилих утворює з площиною кут  $45^\circ$ .
- 2) Катети прямокутного трикутника  $ABC$  мають довжину 60 см і 80 см. Із вершини  $C$  прямого кута до площини трикутника проведено перпендикуляр  $CD$  завдовжки 36 см. Знайдіть тангенс кута між відрізком  $DF$  і площиною трикутника, де  $DF$  — перпендикуляр, проведений із точки  $D$  до прямої  $AB$ .
- 3) Із центра  $O$  правильного трикутника  $ABC$  до його площини проведено перпендикуляр  $MO$  завдовжки 9 см. Перпендикуляр, проведений із точки  $M$  до прямої  $AB$ , утворює з площиною  $ABC$  кут  $30^\circ$ . Знайдіть периметр трикутника  $ABC$ .
- 4) Сторона  $AB$  рівностороннього трикутника  $ABC$  належить площині  $\alpha$ . Із точки  $C$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $CO$ . Відстань від точки  $O$  до прямої  $AB$  дорівнює  $3\sqrt{3}$  см, площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $36\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $\alpha$ .
- 5) Менша сторона прямокутника, що дорівнює 6 см, лежить у площині  $\alpha$ , а протилежна їй сторона віддалена від площини  $\alpha$  на  $4\sqrt{3}$  см. Кут між площиною прямокутника і площиною  $\alpha$  дорівнює  $60^\circ$ . Обчисліть кут, що утворює діагональ прямокутника з площиною  $\alpha$ .

### IV. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

#### 1. Робота з підручником



Дано:  $\varphi = 42^\circ$ ;  $l = 85$  м.

Знайти:  $h$ .

Розв'язання.  $h = l \sin \varphi = 85 \sin 42^\circ \approx 85 \cdot 0,66913 = 56,8760$  (м).

Відповідь:  $\approx 56,88$  м.

#### 2. Самостійна робота

### Варіант 1

- 1) Із точки до площини проведено дві похилі завдовжки 10 см і  $5\sqrt{2}$  см. Більша з них утворює з площиною кут  $30^\circ$ . Який кут утворює з площиною менша похила?
- 2) Доведіть, що бічні сторони рівнобедреного трикутника утворюють рівні кути з площиною, що проходить через його основу.
- 3) Кут між двома площинами дорівнює  $30^\circ$ . У кожній із площин проведено пряму, паралельну лінії їх перетину. Відстань від однієї з цих прямих до лінії перетину площин дорівнює 8 см, а від другої —  $2\sqrt{3}$  см. Знайдіть відстань між проведеними прямими.

### Варіант 2

- 1) Із точки до площини проведено дві похилі. Одна з них, завдовжки 8 см, утворює з площиною кут  $30^\circ$ . Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут  $45^\circ$ .
- 2) Доведіть, що бічні сторони рівнобічної трапеції утворюють рівні кути з площиною, що проходить через більшу основу трапеції.
- 3) Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють  $36 \text{ см}^2$  і  $96 \text{ см}^2$ , мають спільну сторону, а відстань між їх паралельними сторонами дорівнює 14 см. Знайдіть кут між площинами квадрата і прямокутника.

### Відповіді

Варіант 1. 1)  $45^\circ$ . 3)  $2\sqrt{7}$  см.

Варіант 2. 1)  $4\sqrt{2}$  см. 3)  $60^\circ$ .

### V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, РЕФЛЕКСІЯ

### VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Завдання за підручником: ст 246, №№ 1205, 1206

2. Додаткове завдання. Через центр O правильного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OD. Знайдіть косинус кута між площинами ABC і ABD, якщо  $AB = BD$ .

Відповідь.  $1/3$ .

### Урок №68

Тема уроку: Узагальнення знань із теми: Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Мета уроку: узагальнити і систематизувати знання учнів із теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі. Відстані і кути у просторі»; удосконалити вміння розв'язувати задачі з цієї теми; аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати

результати своєї навчальної діяльності;

*Тип уроку:* узагальнення і систематизація знань.

*Хід уроку*

## I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

## II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

*Перевірка завдання, заданого за підручником*

## III. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ

*Фронтальне опитування*

1. Що називають кутом між прямими в просторі?
2. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
3. Сформулюйте означення й ознаку прямої, перпендикулярної до площини. Які властивості мають перпендикулярні пряма і площина?
4. Сформулюйте означення перпендикуляра до площини, похилих та їхніх проекцій на площину.
5. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
6. Сформулюйте означення двогранного кута. Що називають кутом між площинами?
7. Сформулюйте означення й ознаку перпендикулярності площин. Які властивості мають перпендикулярні площини?
8. Що називають відстанню:
  - 1) від точки до прямої у просторі;
  - 2) від точки до площини;
  - 3) від прямої до паралельної їй площини;
  - 4) між паралельними площинами;
  - 5) між мимобіжними прямими?
9. Сформулюйте властивість перпендикуляра, проведеного до площини многокутника з точки, рівновіддаленої:
  - 1) від усіх вершин многокутника;
  - 2) від усіх сторін многокутника.

#### IV. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

##### 1. Робота з підручником

1212. Дано:  $\alpha \cap \beta = c$ ; т.  $A \in \alpha$ ; т.  $B \in \alpha$ ; т.  $C \in \beta$ ; т.  $D \in \beta$ ;  $BD \perp c$ ;  $AE \perp c$ ; т.  $E \in c$ ; т.  $F \in c$ ;  $AC = 1$  дм;  $BD = 2$  дм;  $AE = 3$  дм;  $AC \perp \beta$ ;  $BC \perp \beta$ .

Знайти:  $BF$ .

Розв'язання.  $\angle AEC = \angle BFD$  як лінійні кути одного двогранного кута.  $AE \perp c$ ,  $BF \perp c$ , звідси  $AE \parallel BF$ . Тоді  $\triangle ACE \sim \triangle BDF$  за двома кутами.

Отже,  $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BD}$ ;  $\frac{3}{BF} = \frac{1}{2}$ ;  $BF = 6$  (дм).

Відповідь: 6 дм.

1217. Дано:  $ABCD$  — тетраедр;  $AB \perp AC$ ;  $AC \perp AD$ ;  $AB \perp AD$ ;  $AB = AC = AD$ .

Знайти: міри двогранних кутів при ребрах  $BC$ ,  $CD$ ,  $BD$ .

Розв'язання. Опустимо висоту тетраедра  $AO$ , де точка  $O$  — центр вписаного й описаного кола.  $OK \perp BC$ ,  $OM \perp BD$ ,  $ON \perp DC$  (як радіуси в точці дотику). Дійсно, оскільки  $AC = AB = AD$ , то  $OC = OB = OD$  (рівні похилі мають рівні проекції), т.  $O$  — центр описаного кола. Прямокутні  $\triangle ABC = \triangle ABD = \triangle ACD$  (за двома катетами), тоді  $BC = BD = DC$ , тобто  $\triangle DBC$  — рівносторонній і центри вписаного й описаного кіл збігаються.

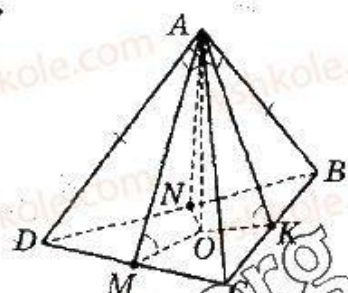
Позначимо сторону основи за  $a$ , тоді  $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = OK$ .

З  $\triangle ABK$  ( $\angle K = 90^\circ$ ,  $\angle ABK = 45^\circ$ ):  $AK = BK = \frac{a}{2}$ .

З  $\triangle AOK$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $\cos \angle OKA = \frac{OK}{AK} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

$\angle OKA = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$  — градусна міра лінійного кута даного двогранного кута.

Відповідь:  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ .



##### 2. Додаткові завдання

1) Через вершину квадрата  $ABCD$  проведено пряму  $AM$ , перпендикулярну до його площини. Обчисліть відстань між прямими  $AM$  і  $BD$ , якщо сторона квадрата дорівнює 12 см.

2) Пряма  $AS$  перпендикулярна до площини квадрата  $ABCD$ . Знайдіть довжину відрізка  $SB$ , якщо  $SC = 10$  см;  $DC = 6$  см.

#### V. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

Самостійна робота з подальшою перевіркою і обговоренням

Варіант 1

1) Пряма  $MB$  перпендикулярна до сторін  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$ . Який вигляд має трикутник  $MBD$ , де  $D$  — довільна точка сторони  $AC$ ?

А. Прямокутний. Б. Гострокутний. В. Тупокутний. Г. Визначити неможливо.

2) Точка  $M$  віддалена від усіх сторін квадрата на 5 см. Знайдіть сторону квадрата, якщо відстань від точки  $M$  до його площини дорівнює 4 см.

А. 4 см. Б. 5 см. В. 6 см. Г. 10 см.

3) Із точок  $C$  і  $D$ , що лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри  $CC_1$  і  $DD_1$  до прямої перетину площин. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, якщо  $CC_1 = 15$  см,  $DD_1 = 16$  см,  $CD = 25$  см.

### *Варіант 2*

1) Пряма  $KO$  перпендикулярна до діагоналей квадрата  $ABCD$ , що перетинаються в точці  $O$ . Який вигляд має трикутник  $KOM$ , де  $M$  — довільна точка відрізка  $AB$ ?

А. Гострокутний. Б. Прямокутний. В. Тупокутний. Г. Визначити неможливо.

2) Точка  $M$  віддалена від усіх сторін квадрата на 5 см. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини квадрата, якщо його сторона дорівнює 8 см.

А. 3 см. Б. 4 см. В. 5 см. Г. 8 см.

3) Із точок  $A$  і  $B$ , що лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$  до прямої перетину площин. Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо  $AA_1 = 21$  см,  $BB_1 = 16$  см,  $A_1B_1 = 12$  см.

### *Відповіді*

Варіант 1. 1) А. 2) В. 3) 12 см.

Варіант 2. 1) Б. 2) А. 3) 29 см.

## VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, РЕФЛЕКСІЯ

## VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Завдання за підручником: ст. 246, 247, №№ 1218, 1224

2. Додаткове завдання. Сторона  $AC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  лежить у площині  $\beta$ , а основа перпендикуляра, проведеного з точки  $B$  до площини  $\beta$ , віддалена від сторони  $AC$  на відстань 6 см. Обчисліть кут між площиною трикутника і площиною  $\beta$ , якщо  $AB = 8\sqrt{3}$  см.

*Відповідь.*  $60^\circ$ .

Урок №69

Тема уроку: Контрольна робота

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння знань учнів із теми «Перпендикулярність

прямих і площин у просторі. Відстані і кути у просторі»;

### Контрольна робота

#### Варіант I

1. На рис. 1 пряма  $MO$  перпендикулярна до площини  $ABC$ . Назвіть кут між площинами  $MOB$  і  $MOD$ , якщо  $OD \perp BC$ . М

| А          | Б          | В          | Г          | Д           |
|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\angle M$ | $\angle D$ | $\angle D$ | $\angle M$ | $\angle MO$ |
| OC         | OB         | MB         | DO         | B           |

1

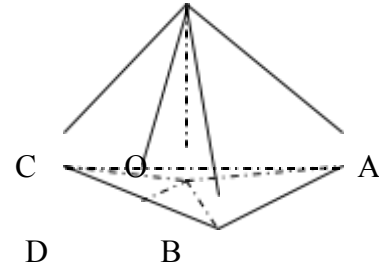


Рис.

2. На рис. 1 укажіть ортогональну проекцію трикутника  $CMB$  на площину  $ABC$ , якщо  $MO \perp (ABC)$ .

| А            | Б            | В            | Г            | Д            |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\Delta ABC$ | $\Delta CDO$ | $\Delta COB$ | $\Delta CAO$ | $\Delta AOB$ |

3. Точка  $O$  є центром описаного навколо прямокутного трикутника  $ABC$  кола (рис. 2). Укажіть відстань від точки  $M$  до прямої  $BC$ , якщо  $MO \perp (ABC)$ .

| А  | Б  | В  | Г  | Д  |
|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    |    |
| MO | MK | MC | MB | MP |

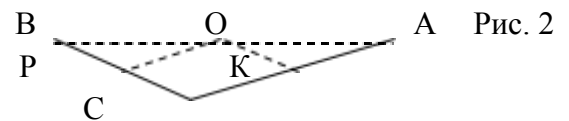
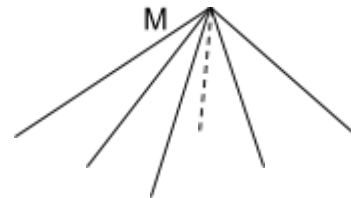


Рис. 2

4. Установіть відповідність між кутами (1-4) (рис.2) та їхніми числовими значеннями (А-Д), якщо  $MO \perp (ABC)$ ,  $BO = AO$ .

- Кут між прямою  $MK$  і площиною  $ABC$ , якщо  $BC=2\sqrt{3}$ ,  $MO=3$
- Кут нахилу ребра  $MC$  до площини основи піраміди  $MAVC$ , якщо  $MO=AO$
- Кут нахилу прямої  $MP$  до площини основи піраміди  $MAVC$ , якщо  $AC=12$ ,  $MO=3$
- Кут нахилу ребра  $MA$  до площини основи піраміди  $MAVC$ , якщо  $CO = 3$ ,  $MO = \sqrt{3}$

А  $\frac{1}{2}$  Б  $30^\circ$  В  $60^\circ$  Г 2 Д  $45^\circ$

5. Усередині двогранного кута, який дорівнює  $60^\circ$ , дано точку, рівновіддалену від його

обох граней на 4 см. Знайдіть відстань від даної точки до ребра двогранного кута.

6. Знайдіть площу ортогональної проекції ромба ABCD на площину  $\alpha$ , якщо сторона AD ромба належить площині  $\alpha$ , діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см, а кут між площиною ромба і площиною  $\alpha$  -  $60^\circ$ .

7. Дано прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 7 см і 24 см. З вершини прямого кута цього трикутника до площини  $\beta$ , яка проходить через його гіпотенузу, проведено перпендикуляр. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо відстань від його основи до гіпотенузи дорівнює  $\frac{84}{25}$  см.

### Контрольна робота Кути і відстані у просторі

#### Варіант II

1. На рис. 1 пряма SO перпендикулярна до площини ABC. Назвіть кут між площинами SOB і SOC.

| А          | Б          | В          | Г          | Д           |
|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\angle C$ | $\angle C$ | $\angle S$ | $\angle S$ | $\angle CO$ |
| AB         | SB         | OC         | OB         | B           |

А О

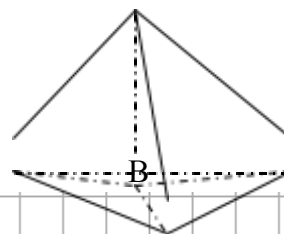


Рис. 1

2. На рис. 1 укажіть ортогональну проекцію трикутника CSB на площину ABC, якщо  $SO \perp (ABC)$ .

| А            | Б            | В            | Г            | Д            |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\Delta AOC$ | $\Delta COB$ | $\Delta AOB$ | $\Delta CSB$ | $\Delta ABC$ |

3. Із точки O –середини гіпотенузи прямокутного трикутника ABC – проведено перпендикуляр OS до площини ABC (рис. 2). Укажіть відстань від точки S до прямої AC.

| А | Б | В  | Г  | Д  |
|---|---|----|----|----|
| S | C | SC | SA | SO |
| N | K |    |    |    |

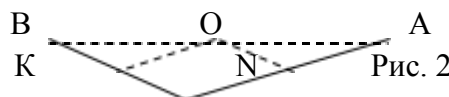
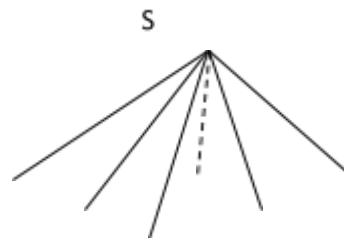


Рис. 2

4. Установіть відповідність між кутами (1-4) (рис.2) та їхніми числовими значеннями (А-Д), якщо  $SO \perp (ABC)$ ,  $AO = OB$ .

1 Кут нахилу ребра SA до площини основи піраміди SABС, якщо радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює 4, а  $SO=8$

2 Кут нахилу прямої SN до площини ABC, якщо  $BC = 6$ ,  $SO=\sqrt{3}$

3 Кут нахилу прямої SK до площини ABC, якщо  $SK=2 KO$

4 Кут нахилу ребра SC до площини ABC, якщо  $SO = OA$

А  $\frac{1}{2}$  Б  $30^\circ$  В  $60^\circ$  Г 2 Д 45

5. Усередині двогранного кута, який дорівнює  $60^\circ$ , дано точку, рівновіддалену від його ребра на 10 см і рівновіддалену від граней двогранного кута. Знайдіть відстань від даної точки до граней двогранного кута.

6. Знайдіть площу ортогональної проекції ромба ABCD на площину  $\alpha$ , якщо сторона AD ромба належить площині  $\alpha$ , сторона ромба дорівнюють  $2\sqrt{3}$  см, кут ромба -  $60^\circ$ , а кут між площиною ромба і площиною  $\alpha$  -  $30^\circ$ .

7. Дано трикутник ABC зі сторонами  $AB = 9$ ,  $BC = 6$  і  $AC = 5$ . Через сторону AC проведено площину  $\beta$ , що утворює із площиною цього трикутника кут  $45^\circ$ . Знайдіть відстань від точки В до площини  $\beta$ .

