

1.- (prueba ordinaria) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(a) Halla a , b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de ecuación $y = 5 - 6x$.

Resolución

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Al tener un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Luego, $6 \cdot \frac{1}{2} + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es -6 , entonces $f'(0) = -6$. Luego, $3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -6$; $b = -6$

Como la recta tangente y la gráfica coinciden en $x = 0$, entonces $f(0) = 5 - 6 \cdot 0 = 5$.
Luego, $0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5$; $c = 5$

Conclusión: debe ser $a = -\frac{3}{2}$, $b = -6$, $c = 5$

(b) Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Resolución

Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$; $f''(x) = 6x + 6$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}; \quad x = 1, x = -3$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 > 0$. En $x = 1$ hay un mínimo relativo.

El mínimo relativo es $x = 1$, $y = f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 8 = 3$. Punto $M(1, 3)$

$f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 6 < 0$. En $x = -3$ hay un máximo relativo.

El máximo relativo es $x = -3$, $y = f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 8 = 35$. Punto $N(-3, 35)$

2.- (prueba ordinaria) Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Resolución

La gráfica de f está formada por dos trozos de rectas; mínimo absoluto $(0, 0)$. $f(x) = \frac{|x|}{2}$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad g'(x) = \frac{-2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ; \quad g(x) = 1 \quad ; \quad \text{A.H. : } y = 0 \text{ (eje X)}$$

Si $x > 0$, $g'(x) > 0$ (creciente) y si $x < 0$, $g'(x) < 0$ (decreciente) ; mínimo absoluto $(0, 1)$

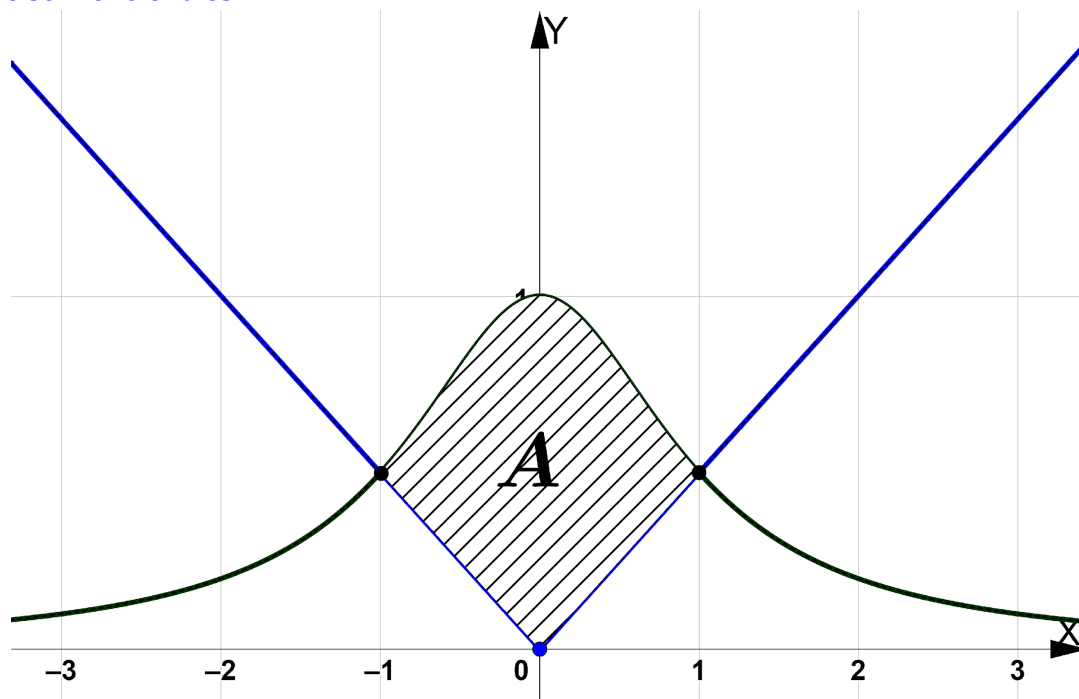
Puntos de corte de las gráficas:

$$\text{Si } x > 0, f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad x^3 + x = 2 \quad ; \quad x^3 + x - 2 = 0. \text{ Resolviendo la ecuación, } x = 1, y = \frac{1}{2}$$

Si $x < 0$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{-x}{2} = \frac{1}{1+x^2}$; $-x^3 - x = 2$; $x^3 + x + 2 = 0$. Resolviendo la ecuación, $x = -1$,
 $y = \frac{1}{2}$

Los puntos de corte entre las gráficas son $P(1, \frac{1}{2})$ y $Q(-1, \frac{1}{2})$

El recinto que se menciona es



Debido a la simetría de las gráficas el área que se pide es $A = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = \arctg x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + k = \frac{4 \arctg x - x^2}{4} + k. \text{ Una primitiva es}$$

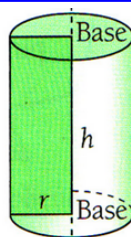
$$p(x) = \frac{4 \arctg x - x^2}{4}.$$

Por la regla de Barrow,

$$A = 2[p(1) - p(0)] = 2 \left[\frac{4 \arctg 1 - 1^2}{4} - \frac{4 \arctg 0 - 0^2}{4} \right] = 2 \left(\frac{4 \cdot \frac{\pi}{4} - 1}{4} \right) = \frac{\pi - 1}{2} \cong 1,0708 \text{ u}^2$$

3.- (prueba ordinaria) Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3 . Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Resolución



$$V(\text{cilindro}) = \pi r^2 h = 125. \text{ Despejando, } h = \frac{125}{\pi r^2}. \text{ La superficie del cilindro es } S = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Función a minimizar $S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{125}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{250}{r}$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 250}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 = 250 \Leftrightarrow r^3 = \frac{125}{\pi} \Leftrightarrow r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$S''(r) = 2\pi + \frac{500}{r^3} > 0, \text{ pues } r \text{ es positivo ; } S''\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0. \text{ Para } r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ la superficie es mínima}$$

$$\text{La altura sería } h = \frac{125}{\pi \frac{25}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{125 \sqrt[3]{\pi^2}}{25\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{5\pi}{\pi \sqrt[3]{\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Por tanto, tanto el radio como la altura deben medir $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m} \cong 3,414 \text{ m}$

4.- (prueba ordinaria) Sea la función definida por $f(x) = x \ln(x+1)$ para $x > -1$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

Resolución

Hallemos $I = \int f(x) dx$. Usamos el método de integración por partes:

$$\left[(x+1) \frac{1}{x+1} dx \quad dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \right] \Rightarrow$$

$$I = \int u dv = uv - \int v du = \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx \quad I_1$$

$$\text{Dado que } \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} ; \quad I_1 = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

Luego,

$$I = \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln \ln(x+1) \right] = \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln \ln(x+1)}{2} + k$$

$$\text{Las infinitas primitivas de } f \text{ serían } F_k(x) = \frac{2x^2 \ln(x+1) - x^2 + 2x - 2 \ln \ln(x+1)}{4} + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Como la primitiva pasa por $(1, 0)$, entonces

$$F_k(1) = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot 1^2 \ln(1+1) - 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 \ln \ln(1+1)}{4} + k = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Por tanto, la primitiva que buscamos es } F(x) = \frac{2x^2 \ln(x+1) - x^2 + 2x - 2 \ln \ln(x+1) - 1}{4}$$

5.- Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

$$\text{Vamos a hallar el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - a(x-1)}{(x-1) \ln x} = \frac{1 \ln 1 - a(1-1)}{(1-1) \ln 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x \ln x - a(x-1)]'}{[(x-1) \ln x]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{1-a}{0}$$

Por la regla de L'Hôpital, el límite que se pide es $\frac{1-a}{0}$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $1-a=0$ porque de lo contrario el límite

valdría $\pm\infty$. Luego, $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$

Para $a = 1$, calculemos el límite. Veamos si se puede aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{(\ln \ln x)'}{(\ln \ln x + 1 - \frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para $a = 1$, vale $\frac{1}{2}$

6.- Determina una función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = -1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

$$f(x) = \int f'(x) dx. \text{ Si } x < 0, f(x) = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k \quad \text{Si } x \geq 0,$$

$$f(x) = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + k'$$

Como $f(1) = -1$, $e^1 - 1 + k' = -1$; $k' = -e$. Por la continuidad de f en $x = 0$, $f(x) = f(x)$

Luego, $\frac{0^3}{3} - 0^2 + k = e^0 - 0 - e$. De donde, $k = 1 - e$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e, & \text{si } x < 0 \\ e^x - x - e, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

7.- Considera la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, & \text{si } x < 0 \\ ax + b, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) Calcula a y b .

Resolución

Al ser derivable, en particular es derivable en $x = 0$.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Si } x < 0, f'(x) = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x})2x - (e^x - e^{-x})2}{4x^2} = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2}; \text{ Si } x > 0, f'(x) = a$$

Como debe ser continua en $x = 0$:

$$f(x) = f(x) \Rightarrow a \cdot 0 + b = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital: $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$

Se puede aplicar. Por tanto, $b = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1$.

Como debe ser derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = f'(x) \Rightarrow a = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2} = \frac{-1+1}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{1 \cdot e^x + (x-1)e^x + 1 \cdot e^{-x} + (x+1)e^{-x}(-1)}{4x} =$$

$$= \frac{x(e^x - e^{-x})}{4x} = \frac{e^x - e^{-x}}{4} = 0. \text{ Se puede aplicar.}$$

$$\text{Por tanto, } a = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2} = 0. \text{ Conclusión: } a = 0, b = 1$$

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = -1$

Como para $x < 0$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2}$, entonces $f'(x_0) = f'(-1) = \frac{(-1-1)e^{-1} + (-1+1)e^{-(-1)}}{2(-1)^2} = \frac{-1}{e}$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{e^{-1} - e^{-(-1)}}{2(-1)} = \frac{e^2 - 1}{2e}; rtg: y = \frac{-1}{e}(x + 1) + \frac{e^2 - 1}{2e} \Rightarrow rtg: y = \frac{-2x + e^2 - 3}{2e}$$

8.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$

(a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

(b) Calcula el área del recinto.

Resolución

El vértice de la parábola $y = x^2$ es $V(0, 0)$ y corta a los ejes también en $(0, 0)$

El vértice de la parábola $y = 2 - x^2$ es $x_v = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$; $y_v = 2 - 0^2 = 2$. $V(0, 2)$

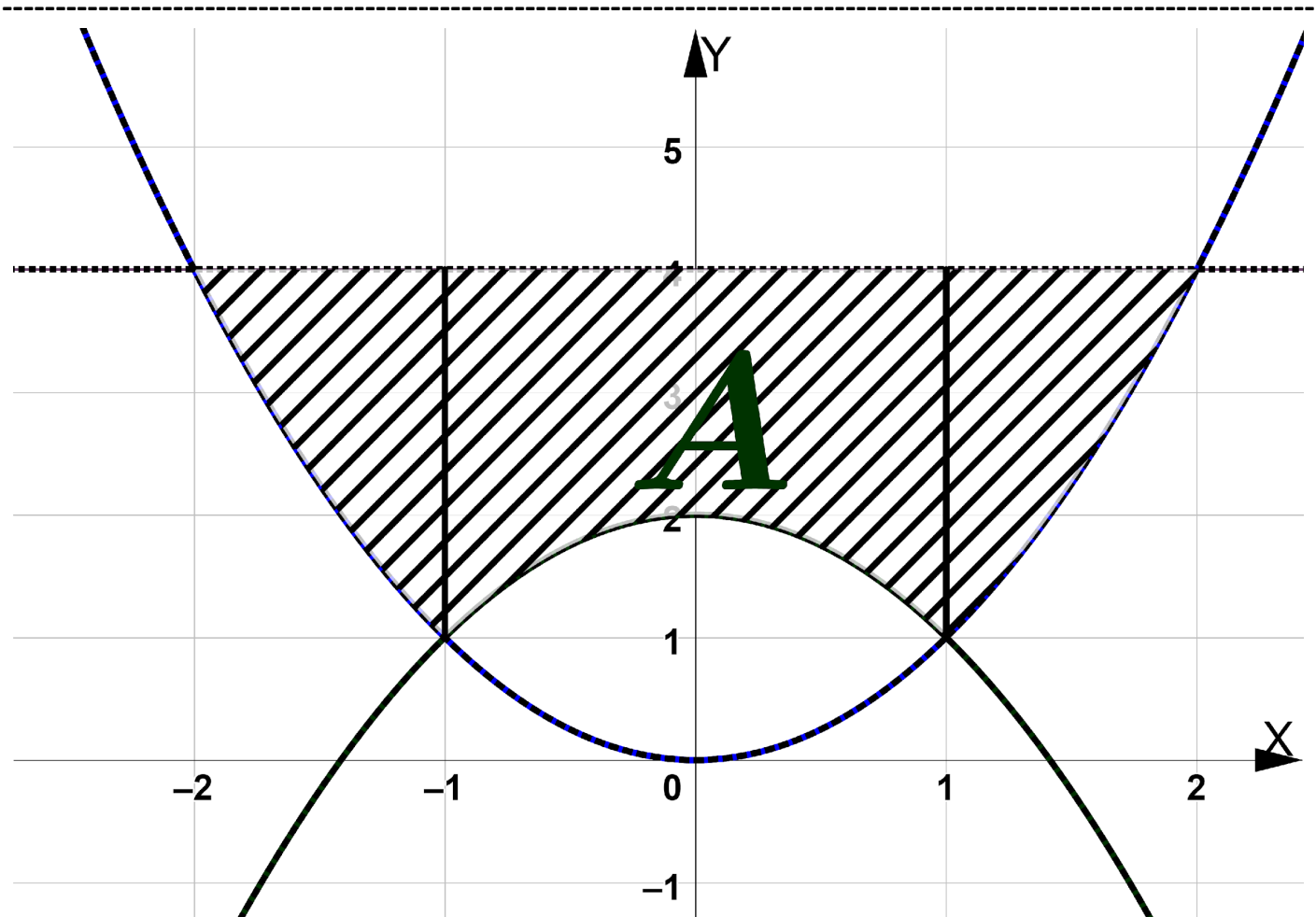
Los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas son:

eje X: $0 = 2 - x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$. Puntos $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$; eje Y: $f(0) = 2 - 0^2 = 2$. Punto $(0, 2)$

Cortes de la parábola $y = x^2$ con la recta:

$\{y = x^2, y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, y = 4$. Punto $(2, 4)$ $x = -2, y = 4$. Punto $(-2, 4)$

Cortes de la parábola $y = 2 - x^2$ con la recta: $\{y = 2 - x^2, y = 4 \Rightarrow 2 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow$ No se cortan.



Por la simetría de las gráficas el área que se pide es $A = 2 \left\{ \int_0^1 [h(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [h(x) - f(x)] dx \right\}$

$$\int [h(x) - g(x)] dx = \int (4 - 2 + x^2) dx = 2x + \frac{x^3}{3} + k = \frac{6x + x^3}{3} + k. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{6x + x^3}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_0^1 [h(x) - g(x)] dx = p(1) - p(0) = \frac{6 \cdot 1 + 1^3}{3} - \frac{6 \cdot 0 + 0^3}{3} = \frac{7}{3} u^2$

$$\int [h(x) - f(x)] dx = \int (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} + k' = \frac{12x - x^3}{3} + k', \text{ una primitiva es } q(x) = \frac{12x - x^3}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_1^2 [h(x) - f(x)] dx = q(2) - q(1) = \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{3} - \frac{12 \cdot 1 - 1^3}{3} = \frac{5}{3} u^2$

El área que se pide es $A = 2 \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3} \right) = 8 u^2$

9.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln \ln x$ para $x > 0$.

(a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Resolución

Observamos que f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables. Nótese que $\frac{1}{2x}$ y $\ln x$ están bien definidos porque $x > 0$.

Usando la regla de la derivada de una suma, $f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{2x^2}$

Dado que $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de abscisa x , $P(x, f(x))$, veamos primero para qué valor de x la pendiente $f'(x)$ es máxima.

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 2x - (2x-1)4x}{4x^4} = \frac{-4x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{1-x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (1-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 3x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{2x^3 - 3x^2}{x^6} = \frac{2x-3}{x^4}.$$

Como $f'''(1) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1^4} < 0$, en $x = 1$ $f'(x)$ es máxima. O sea, la pendiente de la recta tangente es máxima

para $x = 1$, $y = f(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} + \ln \ln 1 = \frac{1}{2}$. El punto que se pide es $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

(b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

La ecuación de la recta normal es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

En este caso, $x_0 = 1$; $f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2}$; $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} + \ln \ln 1 = \frac{1}{2}$

$$rn: y = \frac{-1}{\frac{1}{2}}(x - 1) + \frac{1}{2} \Rightarrow rn: y = -2x + 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow rn: y = -2x + \frac{5}{2}$$

10.- Calcula $\int_{-1}^1 \ln \ln(4 - x) dx$

Resolución

Halleemos $I = \int \ln(4 - x) dx$, para $-1 \leq x \leq 1$. Usamos el método de integración por partes:

$$\left[(4 - x) \frac{-1}{4-x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow I = \int u dv = uv - \int v du = x \ln \ln(4 - x) + \int \frac{x}{4-x} dx \quad I_1$$

Como $\frac{x}{4-x} = -1 + \frac{4}{4-x}$; $I_1 = \int \frac{x}{4-x} dx = \int \left(-1 + \frac{4}{4-x}\right) dx = -x - 4 \ln(4 - x)$

Luego, $I = x \ln \ln(4 - x) - x - (4 - x) + k = (x - 4) \ln \ln(4 - x) - x + k$.

Una primitiva es $p(x) = (x - 4) \ln \ln(4 - x) - x$. Por la regla de Barrow,

$$\int_{-1}^1 \ln \ln(4-x) dx = p(1) - p(-1) = -3 \ln \ln 3 - 1 - [-5 \ln \ln 5 - (-1)] = 5 \ln \ln 5 - 3 \ln \ln 3 -$$

11.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b , c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$

Resolución

f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

Al tener f un máximo relativo en $x = -1$, $f'(-1) = 0$. Luego, $3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 2b - c = 3$

Por otra parte, como $\frac{f(x)}{x-1} = 4$, debe ser $f(1) = 0$ pues de lo contrario el límite no sería finito.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow b + c + d = -1$$

Dado que $f(1) = 0$ resulta que $f(x)$ es divisible por $(x-1)$. Haciendo la división por Ruffini:

$$\begin{array}{r|l} 1 & b & c & d & 1 \\ \hline & 1 & b+1 & b+c+1 & 1 \\ & 1 & b+1 & b+c+d+1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Por tanto, } 4 = \frac{f(x)}{x-1} = [x^2 + (b+1)x + b+c+1] = 1^2 + (b+1) \cdot 1 + b+c+1.$$

De donde, $2b + c = 1$. Nos queda el sistema $\begin{cases} 2b - c = 3 \\ b + c + d = -1 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$.

Sumando la 1ª y 3ª ecuación, $4b = 4$, $b = 1$; $2 \cdot 1 + c = 1$; $c = -1$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $1 + (-1) + d = -1$; $d = -1$. Conclusión: $b = 1$, $c = d = -1$

12.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$; $f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2$

$f(x_0) = f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 3$; rtg: $y = -2(x - 2) + 3 \Rightarrow \text{rtg: } y = -2x + 7$

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje OX , calculando los puntos de corte.

(c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Resolución

La gráfica de f es una parábola de vértice $x_v = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$; $y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$. $V(1, 4)$

Los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas son:

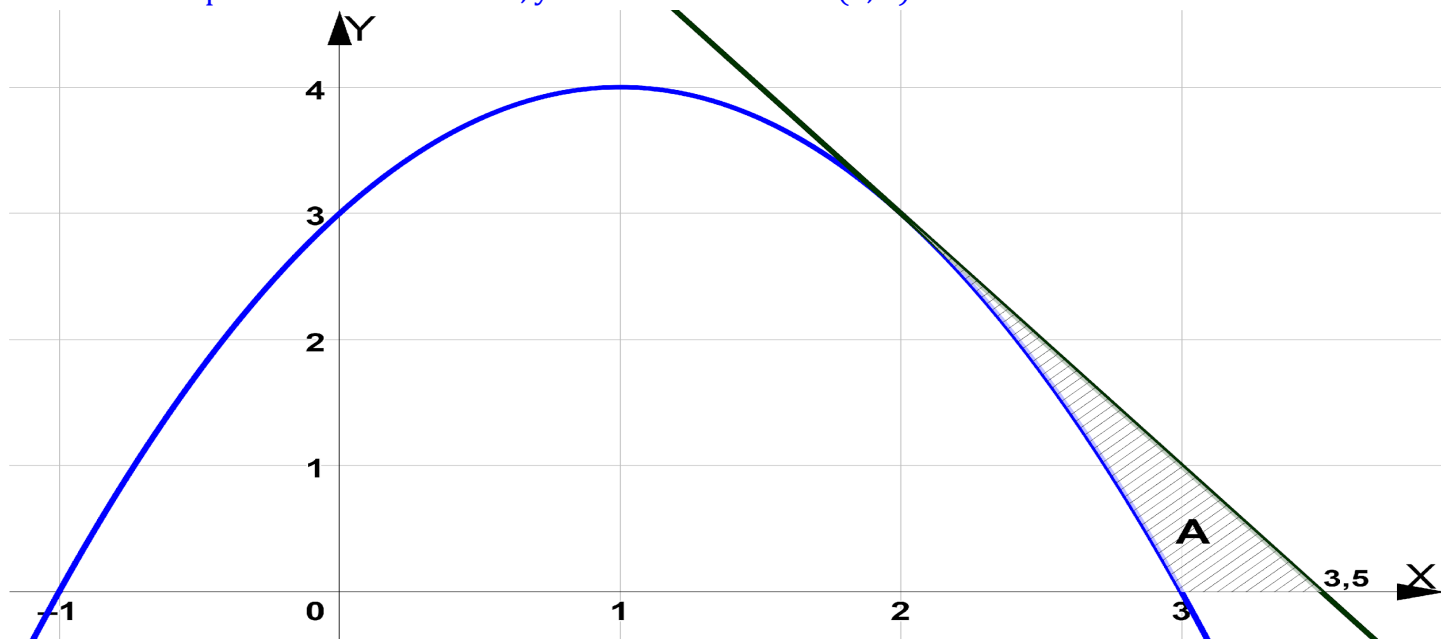
eje X : $0 = -x^2 + 2x + 3 \rightarrow x = -1, x = 3$. Puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$

eje Y : $f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$. Punto $(0, 3)$

Puntos de corte de la parábola con la recta: $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 7 - 2x$

$-x^2 + 2x + 3 = 7 - 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$; $y = 7 - 2 \cdot 2 = 3$. Punto $(2, 3)$

Hallamos otro punto de la recta: $x = 3$, $y = 7 - 2 \cdot 3 = 1$. Punto $(3, 1)$



El área que se pide es $A = \int_2^3 [7 - 2x - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_3^{3.5} (7 - 2x) dx$

$$A = \int_2^3 (x^2 - 4x + 4) dx + \int_3^{7/2} (7 - 2x) dx$$

$\int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + k = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} + k$. Una primitiva es

$$p(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_2^3 (x^2 - 4x + 4) dx = p(3) - p(2) = \frac{3^3 - 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3}{3} - \frac{2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2}{3} = \frac{1}{3} u^2$

$\int (7 - 2x) dx = 7x - x^2 + k$. Una primitiva es $q(x) = 7x - x^2$.

Por la regla de Barrow, $\int_3^{7/2} (7 - 2x) dx = q\left(\frac{7}{2}\right) - q(3) = 7 \cdot \frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - (7 \cdot 3 - 3^2) = \frac{1}{4} u^2$

El área que se pide es $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \cong 0,58 u^2$

13.- (prueba extraordinaria) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \sin x}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

Vamos a hallar el límite. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \sin x} = \frac{0 - e^0 + a \cdot 0}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(3x) - e^x + ax]'}{[x \sin x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\sin(3x) - e^x + a}{\sin x + x \cos x} = \frac{-3\sin 0 - e^0 + a}{\sin 0 + 0 \cos 0} = \frac{a-1}{0} \text{ Indet}$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, el límite que se pide es $\frac{a-1}{0}$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $a-1=0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $a-1=0 \Rightarrow a=1$

Para $a=1$, calculemos el límite. Veamos si se puede aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{[-3\sin(3x) - e^x + 1]'}{(\sin x + x \cos x)'} = \frac{-9\cos(3x) - e^x}{1 - 0 - \sin x} = \frac{-10}{2} = -5$$

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para $a=1$, vale -5

14.- (prueba extraordinaria) Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$.

Resolución

$I = \int \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$. Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción:

$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 + \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$. Luego, $I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{x+2}{x^2 - x - 2} dx \stackrel{I_1}{\sim}$. Para calcular I_1 descomponemos la fracción en

suma de fracciones simples: Como $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, $\frac{x+2}{x^2 - x - 2} = \frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

Multiplicando los dos miembros por $(x+1)(x-2)$, tenemos $x+2 = A(x-2) + B(x+1)$

para $x=-1$, sustituyendo $1 = -3A \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$; para $x=2$, sustituyendo $4 = 3B \Rightarrow B = \frac{4}{3}$

$$I_1 = \int \left(\frac{-1/3}{x+1} + \frac{4/3}{x-2} \right) dx = -\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{4}{3} \ln |x-2| + k ;$$

$$I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{4}{3} \ln |x-2| \right] + k$$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \ln |x+1| + \frac{2}{3} \ln |x-2| + k = \frac{3x - \ln|x+1| + 4\ln|x-2|}{6} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Una primitiva es $p(x) = \frac{3x - \ln|x+1| + 4\ln|x-2|}{6}$. Por la regla de Barrow,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = p(1) - p(0) = \left[\frac{3 \cdot 1 - \ln|1+1| + 4\ln|1-2|}{6} - \frac{3 \cdot 0 - \ln|0+1| + 4\ln|0-2|}{6} \right] = \frac{3 - 5\ln 2}{6}$$

15.- (prueba extraordinaria) De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Resolución

Si $x > 0$ es el número que buscamos, se trata de minimizar la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ porque } x \text{ es positivo.}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \text{ porque } x \text{ es positivo ; } f''(1) > 0. \text{ Para } x = 1, \text{ se alcanza el mínimo} \Rightarrow \text{el número es el 1}$$

16.- (prueba extraordinaria) Calcula $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (Sugerencia: integración por partes)

Resolución

Halleemos primero $I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Usemos el método de integración por partes:

$$\left[u = x \quad dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad v = \tan x \right];$$

$$I = \int u dv = uv - \int v du = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - (-\ln|\cos x|) + k$$

$$I = x \tan x + \ln|\cos x| + k. \text{ Una primitiva es } p(x) = x \tan x + \ln|\cos x|.$$

Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx = p(\pi/4) - p(0) = \left[\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \ln|\cos \frac{\pi}{4}| - (0 \tan 0 + \ln|\cos 0|) \right] = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

17.- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

Resolución

Vamos a hallar el límite. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = \frac{\tan 0 - \sin 0}{0 - \sin 0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan x - \sin x]'}{[x - \sin x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \tan^2 0 - 0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ Indeterm.

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 + \tan^2 x - \cos x]'}{[1 - \cos x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \cdot \sec^2 x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x) + 1}{\cos x} = \frac{2(1 + \tan^2 0) + 1}{\cos 0} = 3$$

Luego, por la regla de L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = 3$

18.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

(a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

Resolución

Sea $A(x, f(x))$ el punto que buscamos.

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto A es -1 , entonces $f'(x) = -1$ y como $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, entonces, $3x^2 - 6x - 1 = -1$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ ó $x = 2$

Si $x = 0$, Para f : $y = f(0) = 3$; Para la recta: $y = 3 - 0 = 3$. Coinciden. Luego, el punto sería $A_1(0, 3)$

Si $x = 2$, Para $f: y = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 3 = -3$; Para la recta: $y = 3 - 2 = 1$. No coinciden.

Luego, $x = 2$ no es solución del problema. Conclusión: El punto es $(0, 3)$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

Resolución

Los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:

eje X: $y = 0$, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$; Usamos Ruffini: $\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ & & 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}$;
 $(x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$

$$x = 1; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}, x = 3, x = -1; \text{ puntos de corte: } (1, 0), (3, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

eje Y: $x = 0$, $y = f(0) = 3$. Punto $(0, 3)$; por otra parte, $f(x) = +\infty$ $f(x) = -\infty$

Puntos de corte de la gráfica con la recta:

$$\{y = x^3 - 3x^2 - x + 3, y = 3 - x\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3 - x \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0$$

$x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$, $y = 3 - 0 = 3$: punto $(0, 3)$; $x = 3$, $y = 3 - 3 = 0$: punto $(3, 0)$

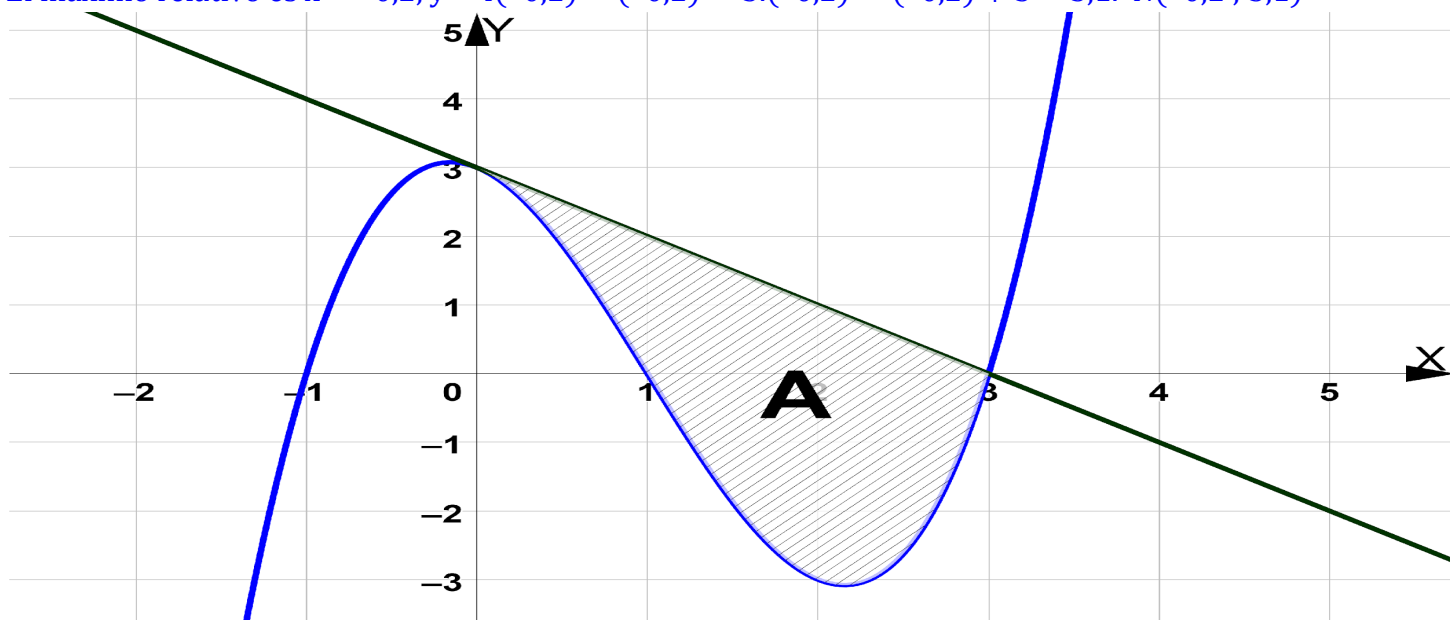
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} \cong \frac{6 \pm 7}{6}; x \cong 2,2; x \cong -0,2$$

$f''(x) = 6x - 6$; $f''(2,2) = 6 \cdot 2,2 - 6 > 0$. En $x = 2,2$ hay un mínimo relativo.

El mínimo relativo es $x = 2,2$, $y = f(2,2) = 2,2^3 - 3 \cdot 2,2^2 - 2,2 + 3 = -3,1$. $M(2,2; -3,1)$

$f'(-0,2) = 6 \cdot (-0,2) - 6 < 0$. En $x = -0,2$ hay un máximo relativo.

El máximo relativo es $x = -0,2$, $y = f(-0,2) = (-0,2)^3 - 3 \cdot (-0,2)^2 - (-0,2) + 3 = 3,1$. $N(-0,2; 3,1)$



$$\text{El área que se pide es } A = \int_0^3 [3 - x - (x^3 - 3x^2 - x + 3)] dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx$$

$$\int (-x^3 + 3x^2) dx = \frac{-x^4}{4} + x^3 + k = \frac{-x^4 + 4x^3}{4} + k. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{-x^4 + 4x^3}{4}.$$

Por la regla de Barrow, $A = p(3) - p(0) = \frac{-3^4 + 4 \cdot 3^3}{4} - \frac{-0^4 + 4 \cdot 0^3}{4} = \frac{27}{4} = 6,75 u^2$

19.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

(a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

Como f es continua, no hay asíntotas verticales.

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. Luego, f tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$ de ecuación A.H: $y = 0$

Estudiamos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2}{e^{x^2}} - 0 = \frac{x^2}{e^{x^2}} > 0$

Si $x \rightarrow \pm\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en $\pm\infty$

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

f es decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

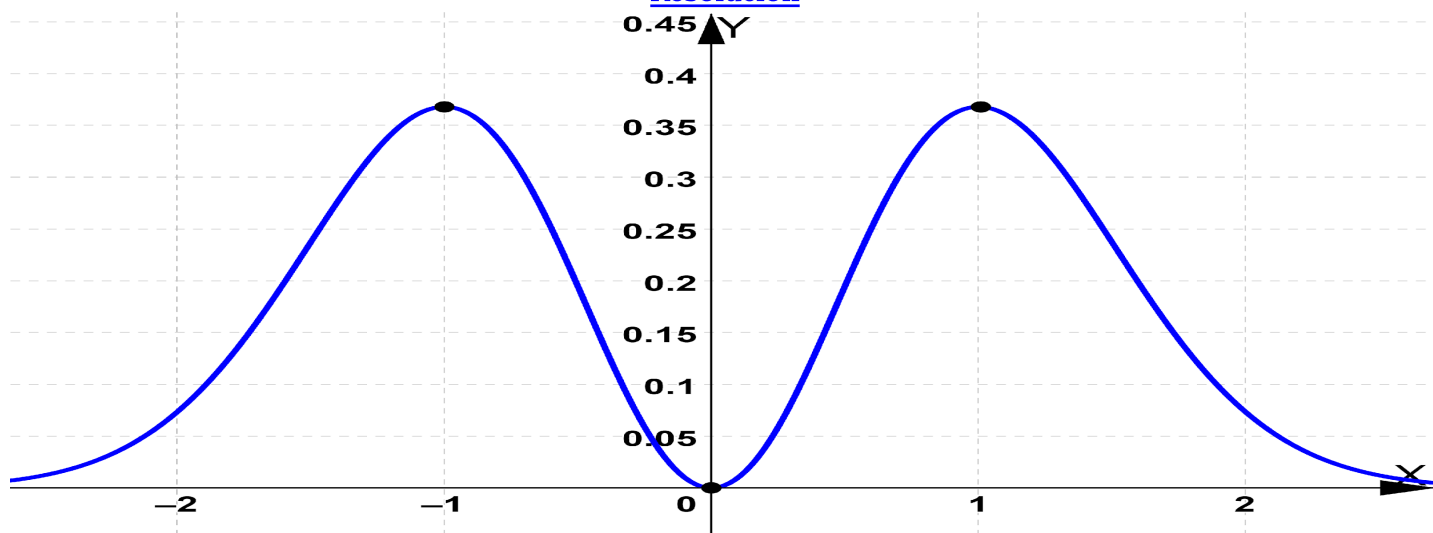
Máximos relativos: $x = -1$, $y = f(-1) = (-1)^2 e^{-(-1)^2} = \frac{1}{e}$. Punto $M(-1, \frac{1}{e})$

$x = 1$, $y = f(1) = 1^2 e^{-1^2} = \frac{1}{e}$. Punto $N(1, \frac{1}{e})$

Mínimo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 e^{-0^2} = 0$. Punto $O(0, 0)$

(c) Esboza la gráfica de f .

Resolución



20.- Sea $f: (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x+9}{(x+1)(x-3)}$

Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$

Resolución

Si F es una primitiva de f entonces $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x+9}{(x+1)(x-3)} dx$.

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{x+9}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

Multiplicando los dos miembros por $(x+1)(x-3)$, tenemos $x+9 = A(x-3) + B(x+1)$

Para $x = -1$, sustituyendo $8 = -4A \Rightarrow A = -2$; Para $x = 3$, sustituyendo $12 = 4B \Rightarrow B = 3$

$$F(x) = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x-3} \right) dx = -2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-3| + k$$

Si la primitiva pasa por $(1, 0)$,

$$F(1) = 0 \Rightarrow -2 \ln |1+1| + 3 \ln |1-3| + k = 0 \Rightarrow \ln 2 + k = 0$$

Luego, $k = -\ln 2$. Por tanto, la primitiva es $F(x) = -2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-3| - \ln 2$

21.- De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2 , determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Resolución

Si x e y son los catetos, $\frac{xy}{2} = 8$. Despejando, $y = \frac{16}{x}$

Si a es la hipotenusa, $a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$. Función a minimizar: $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x - \frac{512}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 512}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} = \frac{x^4 - 256}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{256} = 4$$

Si $x < 4$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente para $x < 4$. Si $x > 4$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente para $x > 4$.

Luego, el mínimo se alcanza para $x = 4$, $y = \frac{16}{4} = 4$, $a = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \cong 5,7$

Por tanto, los catetos miden 4 cm cada uno y la hipotenusa aproximadamente 5,7 cm

22.- Calcula $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ (Sugerencia: cambio de variable $t = \sqrt{x}$)

Resolución

$$t = \sqrt{x}; \quad t^2 = x \quad 2t dt = dx. \text{ Nos queda } I = \int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)} dt = \int \frac{1}{t(t^2+t)} dt = \int \frac{1}{t^2(t+1)} dt$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$

Multiplicando los dos miembros por $t^2(t+1)$, tenemos $1 = At(t+1) + B(t+1) + Ct^2$.

$$\text{- Para } t = 0 \Rightarrow 1 = A \cdot 0(0+1) + B(0+1) + C \cdot 0^2 \Rightarrow B = 1$$

$$\text{- Para } t = -1 \Rightarrow 1 = A(-1)(-1+1) + B(-1+1) + C(-1)^2 \Rightarrow C = 1$$

$$\text{- Para } t = 1 \Rightarrow 1 = A \cdot 1(1+1) + B(1+1) + C \cdot 1^2 \Rightarrow 2A + 2B + C = 1 \Rightarrow 2A + 3 = 1 \Rightarrow A = -1$$

$$I = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} \right) dt = -\ln \ln |t| - \frac{1}{t} + \ln \ln |t+1| + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio, $I = -\ln \ln \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \ln (\sqrt{x} + 1) + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$

23.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable definida por $f(x) = \begin{cases} a - x, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln \ln x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b.

Resolución

Al ser derivable, en particular es derivable en $x = 1$.

Para $x \neq 1$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en $x = 1$: $f(x) = f(x) \Rightarrow a - 1 = \frac{b}{1} - \ln \ln 1 \Rightarrow a - b = 1$

Para $x \neq 1$, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ -\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ -\frac{x-b}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como debe ser derivable en $x = 1$: $f'(x) = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{1-b}{1^2} \Rightarrow b = 2$

Sustituyendo se tiene que $a - 2 = 1$, $a = 3$. Por tanto, debe ser $a = 3$, $b = 2$

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

Para $a = 3$, $b = 2$, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + \ln \ln x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-2}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x < 1$, $f'(x) = -1 < 0 \Rightarrow f$ es decreciente ; si $x > 1$, $f'(x) = \frac{x-2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	decreciente		decreciente	mínimo	creciente

El mínimo relativo se alcanza para $x = 2$, $y = f(2) = \frac{2}{2} + \ln \ln 2 = 1 + \ln \ln 2 \cong 1,69$.

Evaluamos $f(x)$ en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = e$.

$$f(0) = 3 - 0 = 3 ; f(1) = 3 - 1 = 2 ; f(2) = 1 + \ln \ln 2 \cong 1,69 ; f(e) = \frac{2}{e} + \ln \ln e = \frac{2}{e} + 1 \cong 1,74$$

El máximo absoluto es 3 y se alcanza en $x = 0$ y el mínimo es $1 + \ln \ln 2 \cong 1,69$ y se alcanza en $x = 2$

24.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \text{ En este caso, } x_0 = 0.$$

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x x = e^x (\cos x - x), \text{ entonces } f'(x_0) = f'(0) = e^0 (\cos 0 - 0) = 1,$$

$f(x_0) = f(0) = e^0 \cos \cos 0 = 1$. La ecuación de la recta tangente sería rtg: $y = x + 1$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

Resolución

Hallemos $I = \int f(x) dx$. Usamos el método de integración por partes:

$$\left[u = \cos \cos x \quad - \quad \text{sen } x \quad dx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x \right] \Rightarrow$$

$$I = \int u dv = uv - \int v du = e^x \cos \cos x + \int e^x \text{sen } x dx \quad I_1$$

Hallemos I_1 . Usamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left[u = x \cos x \quad dx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x \right] \Rightarrow I_1 = \int u dv = uv - \int v du = e^x x - \int e^x \cos x dx \quad \text{Es } I$$

$$\text{Luego, } I = e^x \cos \cos x + e^x x - I; \quad 2I = e^x (\cos \cos x + \text{sen } x); \quad I = \frac{1}{2} e^x (\cos \cos x + \text{sen } x) + k$$

Las infinitas primitivas de f serían $F_k(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos \cos x + \text{sen } x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$

$$\text{La primitiva pasa por } (0, 0) \Rightarrow F_k(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} e^0 (\cos \cos 0 + \text{sen } 0) + k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, la primitiva que buscamos es $F(x) = \frac{e^x (\cos \cos x + \text{sen } x) - 1}{2}$