

Розв'язані вправи

№ 24.17. Запишіть тригонометричну функцію кута через тригонометричну функцію вдвічі меншого кута

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 8\alpha$; 4) $\sin \frac{x}{3}$.

Розв'язання.

1) $\cos\alpha = \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2})$; 2) $\sin 8\alpha = \sin(2 \cdot 4\alpha)$; 4) $\sin \frac{x}{3} = \sin(2 \cdot \frac{x}{6})$.

№ 24.3. 6) Спростіть вираз

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}.$$

Розв'язання.

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} = 1.$$

Відповідь. 6) 1.

№ 24.33. 1)

Відомо, що $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Знайдіть $\sin \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання.

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi | : 2$, $\frac{3\pi}{2} : 2 < \alpha : 2 < 2\pi : 2$, $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$. Отже $\frac{\alpha}{2}$ – кут II чверті,

тому $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Відповідь. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$.

Завдання для I групи (5, 6, 7, 8 фрейми).

№ 24.3(2, 4), 24.5(1,3), 24.7(2).

№ 24.3. 2) Спростіть вираз

$$\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} - \sin \beta.$$

Розв'язання.

$$\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} - \sin \beta = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} - \sin\beta = 2\sin\beta - \sin\beta = \sin\beta.$$

Відповідь. 2) $\sin\beta$.

№ 24.3. 4) Спростіть вираз

$$\cos 2x - \cos^2 x.$$

Розв'язання.

$$\cos 2x - \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -\sin^2 x.$$

Відповідь. 2) $-\sin^2 x$.

№ 24.5. 1) Скоротіть дріб

$$\frac{\sin \sin 40^\circ}{\sin \sin 20^\circ}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\sin \sin 40^\circ}{\sin \sin 20^\circ} = \frac{\sin \sin (2 \cdot 20^\circ)}{\sin \sin 20^\circ} = \frac{20^\circ}{\sin \sin 20^\circ} = 20^\circ.$$

Відповідь. 1) 20° .

№ 24.5. 3) Скоротіть дріб

$$\frac{\cos \cos 50^\circ}{\sin \sin 25^\circ + \cos \cos 25^\circ}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{\cos \cos 50^\circ}{\sin \sin 25^\circ + \cos \cos 25^\circ} &= \frac{\cos \cos (2 \cdot 25^\circ)}{\sin \sin 25^\circ + \cos \cos 25^\circ} = \frac{\cos^2 25^\circ - \sin^2 25^\circ}{\sin \sin 25^\circ + \cos \cos 25^\circ} = \\ &= \frac{(\cos \cos 25^\circ - \sin \sin 25^\circ)(\cos \cos 25^\circ + \sin \sin 25^\circ)}{\sin \sin 25^\circ + \cos \cos 25^\circ} = 25^\circ - \sin \sin 25^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь. 3) $\cos \cos 25^\circ - \sin \sin 25^\circ$.

№ 24.7. 2) Обчисліть

$$2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}.$$

Розв'язання.

$$2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Завдання для II групи(9, 10, 11, 12 фрейми).

№ 24.7(1, 3, 4, 6), 24.9(1), 24.19(1).

№ 24.7. 1) Обчисліть

$$2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ.$$

Розв'язання.

$$2\sin 75^0 \cos 75^0 = \sin(2 \cdot 75^0) = \sin 150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. 1) $\frac{1}{2}$.

№ 24.7. 3) Обчисліть

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}.$$

Розв'язання.

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь. 3) $\frac{1}{4}$.

№ 24.7. 4) Обчисліть

$$(\cos 15^0 - \sin 15^0)^2.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (\cos 15^0 - \sin 15^0)^2 &= \cos^2 15^0 - 2 \cos 15^0 \sin 15^0 + \sin^2 15^0 = \\ &= \sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 - 2 \cos 15^0 \sin 15^0 = 1 - \sin(2 \cdot 15^0) = 1 - \sin 30^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. 4) $\frac{1}{2}$.

№ 24.7. 6) Обчисліть

$$\sin^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} &= -(\cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sin^2 \frac{5\pi}{12}) = -\cos(2 \cdot \frac{5\pi}{12}) = -\cos \frac{5\pi}{6} = \\ &= -\cos \frac{5 \cdot 180^0}{6} = -\cos \frac{5 \cdot 30^0}{1} = -\cos 150^0 = -\cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

№ 24.9. 1) Спростіть вираз

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2})} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Відповідь. 1) $\frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

№ 24.19. 1) Виконайте пониження степеня у виразі

$$\cos^2 3\alpha.$$

Розв'язання.

$$\cos^2 3\alpha = \frac{1+\cos(2 \cdot 3\alpha)}{2} = \frac{1+\cos 6\alpha}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1+\cos 6\alpha}{2}$.

Завдання для III групи(13, 14, 15, 16 фрейми).

№ 24.7(3), 24.9(2, 3, 5), 24.25(1, 2), 24.33(2)

№ 24.7. 3) Обчисліть

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}.$$

Розв'язання.

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь. 3) $\frac{1}{4}$.

№ 24.9. 2) Спростіть вираз

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь. 3) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}$.

№ 24.9. 3) Спростіть вираз

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin(2 \cdot 2x)}{\sin 2x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x.$$

Відповідь. 3) $2 \cos 2x$.

№ 24.25. 1) Понизьте степінь у виразі

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{4} - 30^\circ \right).$$

Розв'язання.

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{4} - 30^\circ \right) = \frac{1+\cos(2(\frac{\alpha}{4}-30^\circ))}{2} = \frac{1+\cos(\frac{\alpha}{2}-60^\circ)}{2}.$$

Відповідь. 1) $\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-60^0\right)}{2}$.

№ 24.33. 2)

Відомо, що $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Знайдіть $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання.

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi | : 2$, $\frac{3\pi}{2} : 2 < \alpha : 2 < 2\pi : 2$, $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$. Отже $\frac{\alpha}{2}$ – кут II чверті,

тому $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\frac{4}{5}.$$

Відповідь. 2) - $\frac{4}{5}$.