

## PREMIERE PARTIE

### PHENOMENES STATIQUES MECANIQUES ET ELECTRIQUES D'UN MATERIAU NON-PIEZOELECTRIQUE

#### I.1-Etude des propriétés mécaniques d'un matériau élastique :

I.1.1 U est l'allongement relatif algébrique. L'échantillon exerce sur l'opérateur une force  $\vec{F}' = -\vec{F} = -\frac{YS}{e} \Delta e \vec{u}_x$ , d'où la

raideur d'un ressort équivalent :  $K_{eq} = \frac{YS}{e}$ .

I.1.2  $K_{eq} = 8,73 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}$

I.1.3  $E_1 = \frac{1}{Se} \frac{1}{2} K_{eq} (\Delta e)^2$ , d'où  $E_1 = \frac{Y}{2} U^2$

I.1.4 Pour  $F = 10^3 \text{ N}$ , on obtient :  $\Delta e = 0,11 \mu\text{m}$  et  $E_1 = 573 \text{ J.m}^{-3}$ .

I.1.5 Il y a nSa atomes dans une couche d'épaisseur a et de surface S. Chacun de ces atomes marque le début d'une chaîne parallèle à Ox. Dans chacune de ces nSa chaînes, il y a e/a couches d'épaisseur a, donc e/a ressorts de raideur K.

I.1.6 Quand on met bout à bout e/a ressorts de raideur K, l'allongement total est  $\Delta e = \frac{e}{a} \Delta x$ , où  $\Delta x$  est l'allongement d'un ressort de raideur K. A l'équilibre, la force se transmet de ressort en ressort, donc en notant  $K_{lc}$  la raideur d'une chaîne

complète,  $F = K_{lc} \Delta e = K \Delta x$ . D'où  $K_{lc} = K \frac{a}{e}$ .

I.1.7 Il y a nSa chaînes de raideur  $K_{lc}$  côte à côte, d'où  $K_{eq} \Delta e = nSa K_{lc} \Delta e$  et donc  $K_{eq} = \frac{nSa^2}{e} K$ , puis  $Y = na^2 K$ .

#### I.2-Etude des propriétés électriques d'un matériau diélectrique :

I.2.1  $\|\vec{P}_1\|$  et  $\|\vec{\epsilon}_0 \vec{E}\|$  ont la même unité, donc  $\chi_e$  est sans unité. On a immédiatement :  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ .

Dans le diélectrique, il n'y a que des charges liées, donc  $\rho_{libre} = 0$ .

Dans les armatures, il n'y a que des charges surfaciques, donc  $\rho_{libre} = 0$ .

I.2.2 Formule classique :  $C_0 = \epsilon \frac{S}{e}$ .

I.2.3  $E_2 = \frac{1}{Se} \frac{1}{2} C_0 V_{AB}^2 = \frac{\epsilon}{2e^2} V_{AB}^2$

I.2.4  $E_2 = 19,9 \text{ J.m}^{-3}$ .

## DEUXIEME PARTIE

### PHENOMENES STATIQUES MECANIQUES ET ELECTRIQUES D'UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE

I.1. Au I.1.5, pour n atomes par  $\text{m}^3$ , il y avait naS chaînes. Ici, il y a donc naS chaînes commençant par un anion et autant commençant par un cation. Cela fait bien en tout  $N = 2naS$  chaînes.

I.2. Pour une chaîne commençant par un cation, l'opérateur exerce une force  $\vec{F}_{1+} = K_1 u_1 \vec{u}_x$ .

Pour une chaîne commençant par un anion, l'opérateur exerce une force  $\vec{F}_{1-} = K_2 u_2 \vec{u}_x$ .

Pour l'ensemble des  $N/2 + N/2$  chaînes, l'opérateur exerce donc bien une force  $\vec{F} = \left( \frac{N}{2} K_1 u_1 + \frac{N}{2} K_2 u_2 \right) \vec{u}_x$ .

I.3 Un ion positif est soumis à  $\vec{F}_+ = (K_2 u_2 - K_1 u_1) \vec{u}_x$ .

I.4 Puisqu'à l'équilibre  $\vec{F}_+ + q\vec{E} = 0$ , on peut écrire :  $\vec{E} = \frac{(K_1 u_1 - K_2 u_2)}{q} \vec{u}_x$

II.5 En utilisant les relations du II.2 et du II.4 il vient  $u_1 = \alpha_1 E + \beta_1 F$  avec  $\alpha_1 = \frac{q}{2K_1}$  et  $\beta_1 = \frac{1}{NK_1}$ .

II.6 Il vient également  $u_2 = \alpha_2 E + \beta_2 F$  avec  $\alpha_2 = \frac{-q}{2K_2}$  et  $\beta_2 = \frac{1}{NK_2}$ .

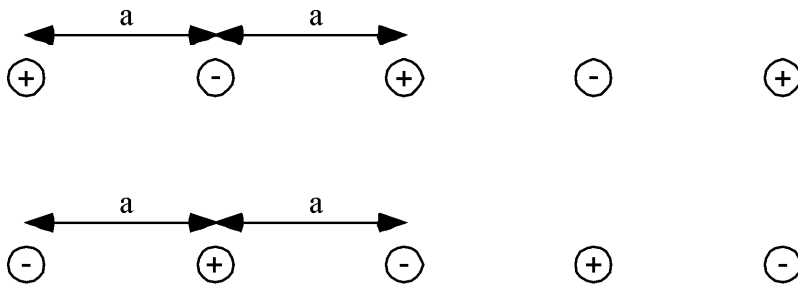
$$p = \frac{q}{2} OP - \frac{q}{2} ON = \frac{q}{2} NP$$

II.7

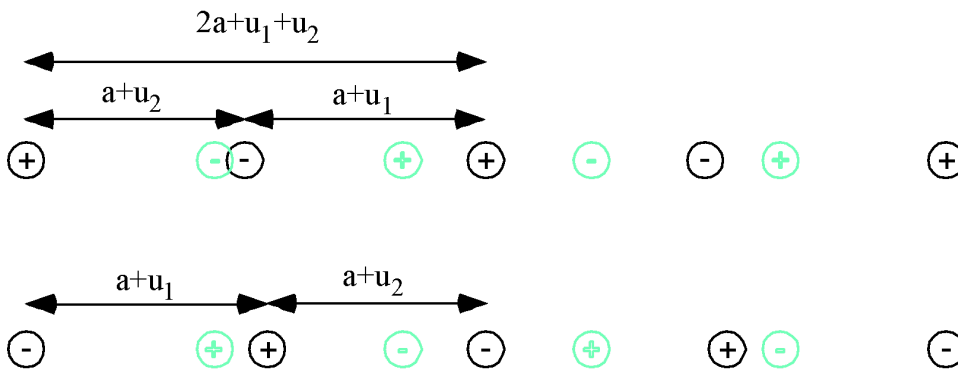
II.8 Sur le premier dessin ci-dessous, le réseau est représenté au repos, pour deux chaînes consécutives. Sur le second, il est représenté déformé, avec  $u_1 > 0$  et  $u_2 < 0$ . On voit sur ce second dessin que le décalage entre les charges + et - ne se fait que dans un plan sur deux. Ce décalage est responsable de l'existence d'un dipôle élémentaire, commun à deux chaînes

$P_1 = q(u_1 - u_2)u_x$ . Puisqu'il y a  $e/a$  ions dans une chaîne, mais seulement  $e/(2a)$  dipôles, communs à deux chaînes, on peut attribuer à chaque chaîne  $e/(4a)$  dipôles élémentaires, donc on a bien un dipôle total pour une chaîne :

$$p_{\text{chaîne}} = \frac{e}{4a} q(u_1 - u_2)u_x$$



Le volume d'une chaîne est  $ea^2$ . Le volume attribué à chaque ion est  $a^3$  mais aussi  $1/(2n)$ .



$$P_2 = \frac{1}{4a^3} q(u_1 - u_2)u_x = \frac{n}{2} q(u_1 - u_2)u_x$$

Ainsi, on peut écrire

II.9 Partant de  $qE = (K_1 u_1 - K_2 u_2)$  et  $2aU = u_2 + u_1$  on obtient  $u_1 = \frac{2aK_2 U + qE}{K_1 + K_2}$  et  $u_2 = \frac{2aK_1 U - qE}{K_1 + K_2}$  puis en remplaçant

dans l'expression de  $P_2$  on peut écrire  $P_2 = (\alpha_p E + \beta_p U)u_x$  avec  $\alpha_p = \frac{nq^2}{K_1 + K_2}$  et  $\beta_p = \frac{nqa(K_2 - K_1)}{K_1 + K_2}$ .

$\alpha_p$  est de même dimension que  $\epsilon_0$  donc s'exprime en  $F.m^{-1}$ .  $\beta_p$  est de même dimension que  $P_2$  donc s'exprime en  $C.m^{-2}$ .

II.10  $\chi_{\text{ion}} = \frac{\alpha_p}{\epsilon_0} = \frac{nq^2}{\epsilon_0(K_1 + K_2)}$ .  $P = P_1 + P_2 = \epsilon_0 \chi_e E + (\alpha_p E + \beta_p U)u_x$  d'où  $P = \epsilon_0(\chi_e + \chi_{\text{ion}})E + \beta_p U$ .

II.11  $D = \epsilon_0 E + P$  donne  $D = \epsilon E + \beta_p U$  avec  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e + \chi_{\text{ion}})$ .

II.12 D'après le II.2 et les expressions de  $u_1$  et  $u_2$  trouvées au II.9, on peut écrire  $F = (\alpha_F E + \beta_F U)u_x$  avec

$$\alpha_F = \frac{Nq(K_1 - K_2)}{2(K_1 + K_2)} \quad \text{et} \quad \beta_F = \frac{2NaK_2K_1}{K_1 + K_2}$$

On remarque que  $\alpha_F = -\frac{N}{2an}\beta_P$ , soit encore  $\alpha_F = -S\beta_P$ .

De plus, d'après la loi de Hooke, donnée au I.1 puis évoquée au II.11, on peut écrire que  $\beta_F = SY$ .

II.13 On est tenté d'écrire  $E_3 = \frac{\varepsilon}{2e^2} V_{AB}^2 + \frac{Y}{2} U^2$ .

#### Application au briquet piezoélectrique

II.14 On est dans le cadre d'un problème mono dimensionnel, toutes les grandeurs vectorielles étant portées par Ox, en particulier le vecteur déplacement. Et du fait qu'il n'y a aucune charge libre volumique, l'équation de Maxwell-Gauss donne

$\frac{\partial D}{\partial x} = 0$  ce qui veut dire finalement que D est uniforme dans l'échantillon. En l'absence de charges libres surfaciques à l'interface entre l'échantillon et la couche métallique, la condition de passage pour la composante normale de D donne D = 0 dans l'échantillon... ?

II.15 D = 0 entraîne  $U = -\frac{\varepsilon}{\beta_P} E$ . De plus,  $V_{AB} = eE$ . D'où finalement  $F = \frac{V_{AB}}{e} \left( \alpha_F - \frac{\beta_F}{\beta_P} \varepsilon \right)$ .

App. Num. Notons pour commencer que la valeur donnée pour  $\beta_F$  dans l'énoncé est visiblement fautive, car ne correspond pas du tout au Y donné au I. Il faut lire, à mon avis,  $0,866 \cdot 10^{-7}$  au lieu de  $0,866 \cdot 10^{-7}$ . On obtient alors, pour une tension de 1 kV,  $|F| = 2,05 \text{ kN}$ . Ce n'est pas peu. Il faut sans doute une démultiplication.

II.16 La densité surfacique de charges de polarisation est  $\sigma_P = P \cdot n$ . Le vecteur déplacement étant nul, on a aussi  $P = -\varepsilon_0 E$ .

La charge apparaissant en surface est donc en valeur absolue  $Q = \varepsilon_0 S E = \frac{\varepsilon_0 S V_{AB}}{e}$  d'où  $Q = 0,88 \text{ nC}$ .

L'énergie électrique récupérée est alors  $W_{\text{elec}} = Q V_{AB} = 0,88 \mu\text{J}$ .

$$W_{\text{méca}} = \frac{1}{2} F U e = \frac{1}{2} F \frac{\varepsilon}{\beta_P} V_{AB} = 240 \mu\text{J}$$

II.17 La force étant proportionnelle au déplacement, on a . On ne récupère sous forme électrique qu'une petite fraction de ce qu'on a fourni mécaniquement. Le reste est stocké sous forme d'énergie potentielle.

## TROISIEME PARTIE

### PHENOMENES DYNAMIQUES

#### III.1-Vibrations propres d'une lame non piézoélectrique : modèle discret :

III.1.1 En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse de rang q, on a, de façon classique :

$$m u_q = K(u_{q+1} - u_q) + K(u_{q-1} - u_q), \text{ d'où } u_q = \omega_0^{-2} (u_{q+1} + u_{q-1} - 2u_q)$$

III.1.2 En remplaçant la solution proposée dans l'équation différentielle, on obtient la relation de dispersion :

$$2\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0^2 \cos ka \text{ soit encore } \omega = \omega_0 \sqrt{2(1 - \cos ka)} = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

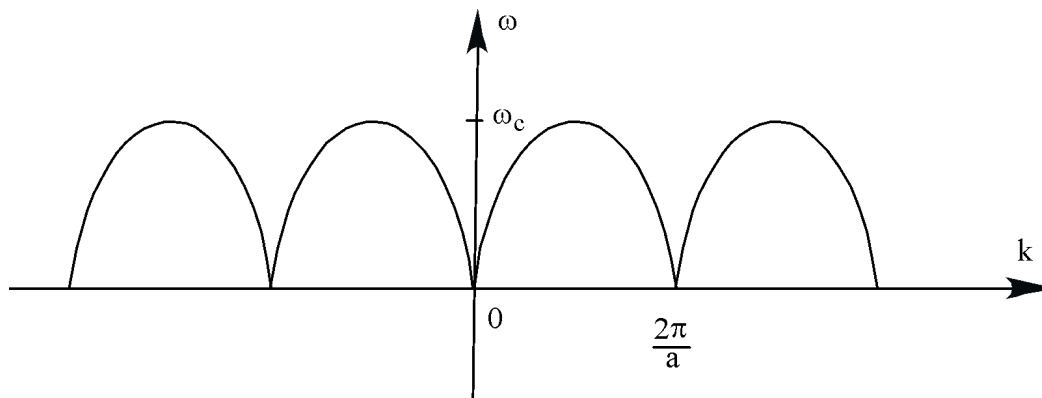
#### III.1.3

III.1.4 Le milieu est très dispersif et a un caractère passe-bas. Il ne laisse passer que les ondes de basse fréquence, c'est-à-dire de pulsation inférieure à  $\omega_c$  puisque, comme le montre la figure,  $\omega$  ne peut dépasser cette valeur. On a

$$\omega_c = 2\omega_0$$

III.1.5 Pour  $\omega = \omega_c$ , on a

$$ka = (2p+1)\pi \text{ ce qui}$$



entraîne  $u_q(t) = A \cos(\omega t - kqa)$ , et  $u_{q-1}(t) = A \cos(\omega t - kqa + (2p+1)\pi)$ . On voit donc que le  $q^{\text{ième}}$  atome vibre en opposition de phase avec ses deux plus proches voisins.

**III.1.6** Il existe une infinité de fonctions d'ondes donnant le même état de vibration en des points discrets. En effet, si on ajoute

$2\pi/a$  à  $k$ , on passe de  $u_q(t) = A \cos(\omega t - kqa)$  à  $u_q(t) = A \cos(\omega t - kqa - 2\pi)$ . Ces deux fonctions mathématiques sont

égales en  $x=qa$  à tout instant, pour tout  $q$ . On peut donc se limiter à l'intervalle  $k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ , c'est-à-dire  $\lambda \in [2a, +\infty[$ .

**III.1.7** 
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0}{k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\lambda\omega_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \omega_0 a \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = \omega_0 a \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)$$

**III.1.8** Si  $k \ll \pi/a$ , alors  $v_g = v_\varphi = \omega_0 a$ . Le milieu n'est plus dispersif.

$$\omega^2 = \omega_0^2 (e^{-\beta a} + e^{\beta a} + 2) = 4\omega_0^2 \left(\cosh \frac{\beta a}{2}\right)^2$$

**III.1.9** On remplace la solution proposée dans l'équation différentielle ce qui donne

d'où  $\frac{\omega}{2\omega_0} = \cosh \frac{\beta a}{2}$ . Que l'on peut mettre sous la forme  $\beta = \frac{2}{a} \ln \left[ \frac{\omega}{2\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 - 1} \right]$ . Une telle onde ne pénètre quasiment pas. Son énergie est réfléchiée sur la face d'entrée.

**III.1.10**

**III.1.11** On effectue un développement limité à l'ordre 2 pour

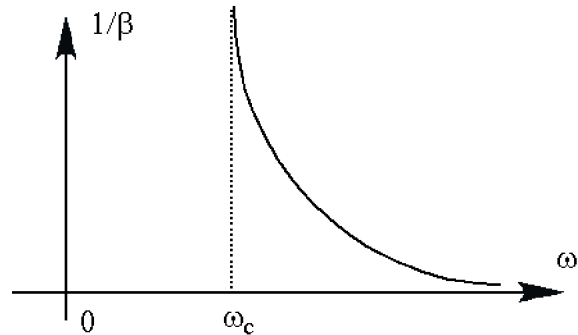
$a \ll \lambda$  : 
$$u((q+1)a, t) = u(qa, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(qa, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(qa, t)$$

et  $u((q-1)a, t) = u(qa, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(qa, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(qa, t)$  que l'on reporte dans ce qui est devenu une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(qa, t) = \omega_0^2 [u((q+1)a, t) + u((q-1)a, t) - 2u(qa, t)]$$

On obtient alors  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2 \omega_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ . La vitesse de propagation de l'onde est  $v_1 = a\omega_0 = a\sqrt{\frac{K}{m}}$ . Or, on a  $\rho = nm$ .

D'où 
$$v_1 = \sqrt{\frac{a^2 K n}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$



## III.2- Vibrations d'une lame piézoélectrique : modèle continu

**III.2.1** De même qu'au II.14, on peut dire que le déplacement électrique est uniforme et nul dans le quartz.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à une tranche  $\delta x$  du quartz :

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(x, t) + F(x + \delta x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \quad \text{d'où} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x} = Y \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E}{\partial x} \quad \text{Or } D = 0, \text{ donc } E = -\frac{\gamma}{\epsilon} U \quad \text{puis}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{Y + \gamma^2 / \epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

, ce qui est bien une équation de d'Alembert avec  $v_2 = \sqrt{\frac{Y + \gamma^2 / \epsilon}{\rho}}$ . Pour  $\gamma = 0$ , on retrouve bien la

célérité  $v_1 = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  que l'on avait obtenue dans le cas d'un milieu non piézoélectrique.

**III.2.2** En remplaçant la solution proposée dans l'équation aux dérivées partielles précédente, on obtient la relation de

$$k = \frac{\omega}{v_2}$$

dispersion toute simple :

Puisque  $u(0, t) = 0$  pour tout  $t$ , nécessairement  $A = 0$ .

Puisque pour tout  $t$   $\Sigma\left(\pm \frac{e}{2}, t\right) = 0$ , alors  $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\pm \frac{e}{2}, t\right) = 0$ , ce qui entraîne  $\cos\left(\frac{ke}{2}\right) = 0$ , d'où  $f = (2p+1)f_0$ , avec  $f_0 = \frac{v_2}{2e}$ .

$$e = \frac{v_2}{2f_0} = 0,68\text{mm}$$

III.2.3 Pour  $f_0 = 2^{22}$  Hz, on obtient . On note au passage l'écart entre l'épaisseur trouvée ici et celle considérée depuis le début du problème, qui était de 1 mm.

L'intérêt de prendre pour fréquence fondamentale une puissance de 2 est de pouvoir obtenir, après plusieurs circuits diviseurs de fréquence (diviseur par 2) une fréquence de 1 Hz, laquelle permettra l'affichage des secondes sur une montre à quartz.

III.2.4  $E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} U = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x}$ , d'où  $V = \frac{\gamma}{\varepsilon} u + g(t)$ . A t fixé, en effectuant la différence entre les potentiels des points A

et B, on obtient bien :  $V_{AB}(t) = V(e/2, t) - V(-e/2, t) = \frac{\gamma}{\varepsilon} [u(e/2, t) - u(-e/2, t)]$ .

Or,  $u(e/2, t) = (-1)^p B \sin(\omega t)$  et  $u(-e/2, t) = -(-1)^p B \sin(\omega t)$ , donc  $V_{AB}(t) = (-1)^p \frac{2\gamma}{\varepsilon} B \sin(\omega t)$ .

En prenant  $B > 0$ , l'allongement maximum est  $\Delta e = 2B$ . La valeur efficace de la tension est donc reliée à l'allongement

maximum par la relation :  $V_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{\varepsilon \sqrt{2}} \Delta e$ .

III.2.5 Pour  $V_{\text{eff}} = 5$  V, on trouve  $\Delta e = 1,66\text{nm}$ .

III.2.6 On a une charge surfacique de densité  $\sigma_{\text{libre}}(t)$  en  $x = e/2$  et  $-\sigma_{\text{libre}}(t)$  en  $x = -e/2$ . Si le vecteur déplacement est nul dans le métal, la condition de passage pour la composante normale du déplacement électrique s'écrit en  $x = e/2$  :

$0 - D\left(\frac{e}{2}, t\right) = \sigma_{\text{libre}}(t)$  . De même en  $x = -e/2$ , la condition de passage s'écrit :  $D\left(-\frac{e}{2}, t\right) - 0 = -\sigma_{\text{libre}}(t)$ . De plus,

l'équation de Maxwell-Gauss (sachant qu'il n'y a pas de charges libres dans le quartz) montre que D y est uniforme. En

conclusion, dans tout le quartz, on a bien :  $D(x, t) = -\sigma_{\text{libre}}(t) u_x$ .

III.2.7 Puisque D est non nul, on a, cette fois  $E(x, t) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} U(x, t) - \frac{\sigma_{\text{libre}}(t)}{\varepsilon}$ . Le terme en plus par rapport au III.2.1 ne

dépend pas de x, donc  $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = Y \frac{\partial U}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E}{\partial x}$  est inchangé. On obtient donc encore l'équation de d'Alembert  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

III.2.8 On remplace la solution proposée dans l'équation de d'Alembert :  $\frac{d^2 \underline{u}_x}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{v_2^2} \underline{u}_x(x) = 0$ , d'où la solution :

$\underline{u}_x(x) = \underline{A} e^{j\frac{\omega}{v_2}x} + \underline{B} e^{-j\frac{\omega}{v_2}x}$ . La condition aux limites  $u(x, t) = 0$  pour tout t donne  $\underline{B} = -\underline{A}$  et par conséquent

$\underline{u}_x(x) = 2j\underline{A} \sin\left(\frac{\omega}{v_2}x\right)$ . Et si  $\underline{A} = A_0 e^{j\psi}$ ,  $\underline{u}(x, t) = 2A_0 \sin\left(\frac{\omega}{v_2}x\right) e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2} + \psi)}$ . En choisissant bien l'origine des temps, on

peut donc écrire  $u(x, t) = 2A_0 \sin\left(\frac{\omega}{v_2}x\right) \cos(\omega t)$ .

III.2.9  $U(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 2A_0 \frac{\omega}{v_2} \cos\left(\frac{\omega}{v_2}x\right) \cos(\omega t) = U_0 \cos\left(\frac{\omega}{v_2}x\right) \cos(\omega t)$ .

III.2.10 D'une part,  $\Sigma(\pm e/2, t) = 0$  entraîne  $YU(\pm e/2, t) - \gamma E(\pm e/2, t) = 0$ .

D'autre part,  $\sigma_{\text{libre}}(t) = -D(x, t) = -D(e/2, t) = -\gamma U(e/2, t) - \varepsilon E(e/2, t)$ , d'où

$\sigma_{\text{libre}}(t) = -\left(\gamma + \frac{\varepsilon Y}{\gamma}\right) U(e/2, t) = -\left(\gamma + \frac{\varepsilon Y}{\gamma}\right) U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega e}{2v_2}\right)$ . C'est à dire  $\sigma_{\text{libre}}(t) = \sigma_0 \cos(\omega t)$  avec

$\sigma_0 = -\left(\gamma + \frac{\varepsilon Y}{\gamma}\right) U_0 \cos\left(\frac{\omega e}{2v_2}\right)$ .

$$E(x, t) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} U(x, t) - \frac{\sigma_{\text{libre}}(t)}{\varepsilon} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} U_0 \cos(\omega t) \cos(kx) + U_0 \left( \frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{Y}{\gamma} \right) \cos\left(\frac{ke}{2}\right) \cos(\omega t) \quad \text{avec}$$

III.2.11 D'après le III.2.7,

$$k = \frac{\omega}{v_2} \quad E(x, t) = U_0 \cos(\omega t) \left[ \alpha_E \cos\left(\frac{ke}{2}\right) + \beta_E \cos(kx) \right] \quad \text{avec} \quad \alpha_E = \frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{Y}{\gamma} \quad \text{et} \quad \beta_E = -\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Pour obtenir la différence de potentiel entre A et B, il suffit d'intégrer le champ électrique par rapport à x :

$$V_{AB}(t) = -U_0 \cos(\omega t) \left[ \alpha_E e \cos\left(\frac{ke}{2}\right) + \frac{2}{k} \beta_E \sin\left(\frac{ke}{2}\right) \right] \quad \text{puis en complexe :} \quad \underline{V}_{AB} = -U_0 e^{j\omega t} \left[ \alpha_E e \cos\left(\frac{ke}{2}\right) + \frac{2}{k} \beta_E \sin\left(\frac{ke}{2}\right) \right]$$

III.2.12 Compte tenu de la question qui suit (impédance, convention récepteur), il est nécessaire d'orienter le courant i de A

vers B (non précisé dans l'énoncé). Ainsi, on a la relation :  $i(t) = S \frac{d\sigma_{\text{libre}}(t)}{dt}$ . Et en notation complexe :  $\underline{I} = j\omega S \sigma_0 e^{j\omega t}$ .

III.2.13 En faisant le rapport de la tension au courant en notation complexe, on obtient l'impédance complexe :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\left[ \alpha_E e \cos\left(\frac{ke}{2}\right) + \frac{2}{k} \beta_E \sin\left(\frac{ke}{2}\right) \right]}{j\omega S \varepsilon \alpha_E \cos\left(\frac{ke}{2}\right)} = \frac{e}{j\omega S \varepsilon} + \frac{2\beta_E}{j\omega k S \varepsilon \alpha_E} \tan\left(\frac{ke}{2}\right)$$

III.2.14 L'impédance s'annule pour  $\tan\left(\frac{ke}{2}\right) = -\frac{ke}{2} \frac{\alpha_E}{\beta_E}$ , la fréquence  $f_1'$  vérifie donc l'équation :

$$\tan\left(\frac{\pi f_1' e}{v_2}\right) = -\frac{\pi f_1' e}{v_2} \frac{\alpha_E}{\beta_E} = \frac{\pi f_1' e}{v_2} \left(1 + \frac{Y\varepsilon}{\gamma^2}\right) \quad \text{Celle-ci se résout numériquement et donne } f_1' = 4,180 \text{ MHz.}$$

L'impédance devient infinie lorsque la tangente le devient. Ceci se produit une première fois pour la fréquence  $f_1'' = v_2/(2e) = 4,194 \text{ MHz}$ .

**Remarque :** Ces valeurs numériques ont été obtenues pour  $e = 0,68 \text{ mm}$  trouvé au III.2.3. Si on prend  $e = 1 \text{ mm}$ , on obtient  $f_1' = 2,861 \text{ MHz}$  et  $f_1'' = 2,870 \text{ MHz}$ , qui sont plus compatibles avec les pulsations  $\omega_1'$  et  $\omega_1''$  données dans la quatrième partie.

## QUATRIEME PARTIE

### MODELISATION ELECTRODINAMIQUE DU QUARTZ ET OSCILLATEUR

IV.1. En utilisant les lois d'associations d'impédances, on peut en effet mettre celle du dipôle AB sous la forme

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{jC_0\omega} \left( \frac{\omega_1'^2 - \omega^2}{\omega_1''^2 - \omega^2} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_1' = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \quad \text{et} \quad \omega_1'' = \sqrt{\frac{C_0 + C_m}{C_0 L_m C_m}}, \quad \text{la seconde étant la plus grande des deux.}$$

On peut écrire  $\underline{Z}_{AB} = jX_1$ , avec

$$X_1 = -\frac{1}{C_0\omega} \left( \frac{\omega_1'^2 - \omega^2}{\omega_1''^2 - \omega^2} \right)$$

L'impédance est capacitive pour  $\omega < \omega_1'$  et  $\omega > \omega_1''$ . Elle est inductive pour  $\omega_1' < \omega < \omega_1''$ .

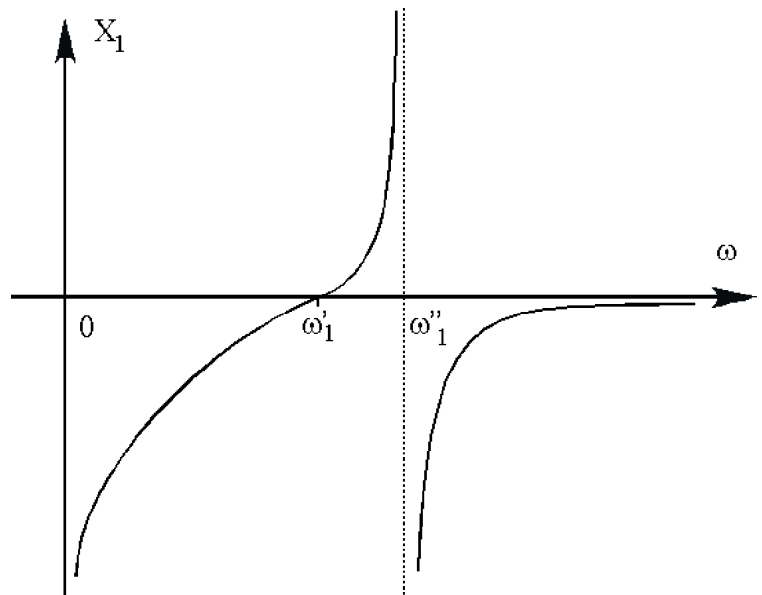
IV.2. L'impédance équivalente  $\underline{Z}$  de l'ensemble formé par les impédances  $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  et par le dipôle AB est

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{S}{j(X_2 + X_3)(X_1 + X_4)} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = j \frac{RX_3(X_1 + X_4)}{S}$$

En appliquant deux fois la formule du diviseur de

$$\text{tension,} \quad \underline{V}_e = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} G \underline{V}_e \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_s} \quad \text{d'où}$$

$$1 = j \frac{GX_3(X_1 + X_4)}{SR_s + jRX_3(X_1 + X_4)} \quad \text{ce qui conduit à deux équations réelles : } S = 0 \text{ et } G = R.$$



IV.3 On nous donne  $X_2 = X_3 = X_4 = \frac{-1}{C\omega}$ . La condition  $S = 0$  conduit à  $X_1 = \frac{3}{C\omega}$ , c'est à dire  $\frac{3}{C} = \frac{1}{C_0} \left( \frac{\omega^2 - \omega_1'^2}{\omega_1''^2 - \omega^2} \right)$ , d'où

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{\omega_1'^2 + \alpha_c \omega_1''^2}{1 + \alpha_c}} \quad \text{avec} \quad \alpha_c = \frac{3C_0}{C}.$$

IV.4

| C (nF)                                | 1                        | 10                       | 100                      |
|---------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\omega_{osc}$ (rad.s <sup>-1</sup> ) | 1,790119.10 <sup>7</sup> | 1,790012.10 <sup>7</sup> | 1,790001.10 <sup>7</sup> |

$$C_m = C_0 \left[ \left( \frac{\omega_1''}{\omega_1'} \right)^2 - 1 \right] = 0,045 \text{ pF} \quad \text{c'est bien peu !!}$$

et

$$L_m = \frac{1}{C_m \omega_1'} = 69 \text{ mH}$$

IV.5 On remarque en effet que la valeur de C a bien peu d'influence sur la pulsation d'oscillation !!  
En appelant S (choix du nom prêtant ici à confusion) la sensibilité, on a

$$S = \frac{C}{\omega_{osc}} \frac{\partial \omega_{osc}}{\partial C} = \frac{3CC_0 (\omega_1'^2 - \omega_1''^2)}{2(C + 3C_0)(C\omega_1'^2 + 3C_0\omega_1''^2)} = -6,7.10^{-6}$$