

Что нужно знать:

- в принципе, особых дополнительных знаний, кроме здравого смысла и умения перебирать варианты (не пропустив ни одного!) здесь, как правило, не требуется
- полезно знать, что такое *граф* (это набор вершин и соединяющих их ребер) и как он описывается в виде таблицы, хотя, как правило, все необходимые объяснения даны в формулировке задания
- чаще всего используется *взвешенный граф*, где с каждым ребром связано некоторое число (вес), оно может обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

1

2

4

2

3

A

B

C

D

E

рассмотрим граф (рисунок слева), в котором 5 вершин (A, B, C, D и E); он описывается таблицей, расположенной в центре; в ней, например, число 4 на пересечении строки B и столбца C означает, что, во-первых, есть ребро, соединяющее B и C, и во-вторых, вес этого ребра равен 4; пустая клетка на пересечении строки A и столбца B означает, что ребра из A в B нет¹

2

4

2

3

A

B

С
D
Е

- обратите внимание, что граф по заданной таблице (она еще называется *весовой матрицей*) может быть нарисован по-разному; например, той же таблице соответствует граф, показанный на рисунке справа от нее
- в приведенном примере матрица симметрична относительно главной диагонали; это может означать, например, что стоимости перевозки из В в С и обратно равны (это не всегда так)
- желательно научиться быстро (и правильно) строить граф по весовой матрице и наоборот

Еще пример задания:

Грунтовая дорога проходит последовательно через населенные пункты А, В, С и D. При этом длина дороги между А и В равна 80 км, между В и С – 50 км, и между С и D – 10 км. Между А и С построили новое асфальтовое шоссе длиной 40 км. Оцените минимально возможное время движения велосипедиста из пункта А в пункт В, если его скорость по грунтовой дороге – 20 км/час, по шоссе – 40 км/час.

- 1) 1 час 2) 1,5 часа 3) 3,5 часа 4) 4 часа

Решение:

1. нарисуем схему дорог, обозначив данные в виде дроби (расстояние в числителе, скорость движения по дороге – в знаменателе):

А
В
D
С

2. разделив числитель на знаменатель, получим время движения по каждой дороге

А
В
D
С

3. ехать из А в В можно
 - напрямую, это займет 4 часа, или ...
 - через пункт С, это займет 1 час по шоссе (из А в С) и 2,5 часа по грунтовой дороге (из В в С), всего $1 + 2,5 = 3,5$ часа
4. таким образом, правильный ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно не заметить, что требуется найти минимальное время поездки именно в В, а не в С (неверный ответ 1 час)
- можно ограничиться рассмотрением только прямого пути из А в В и таким образом получить неверный ответ 4 часа
- можно неправильно нарисовать схему

Еще пример задания:

Таблица стоимости перевозок устроена следующим образом: числа, стоящие на пересечениях строк и столбцов таблиц, означают стоимость проезда между соответствующими соседними станциями. Если пересечение строки и столбца пусто, то станции не являются соседними. Укажите таблицу, для которой выполняется условие: «Минимальная стоимость проезда из А в В не больше 6». Стоимость проезда по маршруту складывается из стоимостей проезда между соответствующими соседними станциями.

1)

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

2)

	A	B	C	D	E
A			3	1	1
B			4		
C	3	4			2
D	1				
E	1		2		

3)

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E	4	2	2		

4)

	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

Решение (вариант 1):

1. нужно рассматривать все маршруты из А в В, как напрямую, так и через другие станции
2. рассмотрим таблицу 1:
 - из верхней строки таблицы следует, что из А в В напрямую везти нельзя, только через С (стоимость перевозки А-С равна 3) или через D (стоимость перевозки из А в D равна 1)

	A	B	C	D	E
A			3	1	

- предположим, что мы повезли через С; тогда из третьей строки видим, что из С можно ехать в В, и стоимость равна 4

	A	B	C	D	E
--	---	---	---	---	---

C	3	4			2
---	---	---	--	--	---

- таким образом общая стоимость перевозки из А через С в В равна $3 + 4 = 7$
- кроме того, из С можно ехать не сразу в В, а сначала в Е:

	A	B	C	D	E
C	3	4			2

а затем из Е – в В (стоимость также 2),

	A	B	C	D	E
E		2	2		

так что общая стоимость этого маршрута равна $3 + 2 + 4 = 7$

- теперь предположим, что мы поехали из А в D (стоимость 1); из четвертой строки таблицы видим, что из D можно ехать только обратно в А, поэтому этим путем в В никак не попасть:

	A	B	C	D	E
D	1				

- таким образом, для первой таблицы минимальная стоимость перевозки между А и В равна 7; заданное условие «не больше 6» **не выполняется**
- аналогично рассмотрим вторую схему; возможные маршруты из А в В:
 - , стоимость 7
 - , стоимость 7
 - таким образом, минимальная стоимость 7, условие **не выполняется**
 - для третьей таблицы:
 - , стоимость 7
 - , стоимость 6
 - , стоимость 7
 - таким образом, минимальная стоимость 6, условие **выполняется**
 - для четвертой:
 - , стоимость 9
 - , стоимость 8
 - минимальная стоимость 8, условие **не выполняется**
 - условие «не больше 6» выполняется только для таблицы 3
 - таким образом, правильный ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- метод ненагляден, легко запутаться и пропустить решение с минимальной стоимостью

Решение (вариант 2, с рисованием схемы):

- для каждой таблицы нарисует соответствующую ей схему дорог, обозначив стоимость перевозки рядом с линиями, соединяющими соседние станции:

1)	2)	3)	4)																																																																																																																																																
<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><th>A</th><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr><tr><th>B</th><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>2</td></tr><tr><th>C</th><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><th>D</th><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>E</th><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	A			3	1		B			4		2	C	3	4			2	D	1					E		2	2			<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><th>A</th><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><th>B</th><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><th>C</th><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><th>D</th><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>E</th><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	A			3	1	1	B			4			C	3	4			2	D	1					E	1		2			<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><th>A</th><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><th>B</th><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>2</td></tr><tr><th>C</th><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><th>D</th><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>E</th><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	A			3	1	4	B			4		2	C	3	4			2	D	1					E	4	2	2			<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><th>A</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><th>B</th><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>1</td></tr><tr><th>C</th><td></td><td>4</td><td></td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><th>D</th><td>1</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><th>E</th><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>		A	B	C	D	E	A				1		B			4		1	C		4		4	2	D	1		4			E		1	2		
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1																																																																																																																																															
B			4		2																																																																																																																																														
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E		2	2																																																																																																																																																
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1	1																																																																																																																																														
B			4																																																																																																																																																
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E	1		2																																																																																																																																																
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1	4																																																																																																																																														
B			4		2																																																																																																																																														
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E	4	2	2																																																																																																																																																
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A				1																																																																																																																																															
B			4		1																																																																																																																																														
C		4		4	2																																																																																																																																														
D	1		4																																																																																																																																																
E		1	2																																																																																																																																																

1

2

4

2

3

A

B

C

D

E

1

2

4

1

3

A

B

C

D

E

1

2

4

4

3

A

C

D

2

B

Е

1

2

4

4

А

С

Д

1

В

Е

2. теперь по схемам определяем кратчайшие маршруты для каждой таблицы:

1: или , стоимость 7

2: или , стоимость 7

3: , стоимость 6

4: , стоимость 8

8. условие «не больше 6» выполняется только для таблицы 3

9. таким образом, правильный ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- нужно внимательно строить схемы по таблицам, этот дополнительный переход (от табличных моделей к графическим) повышает наглядность, но добавляет еще одну возможность для ошибки
- наглядность схемы зависит от того, как удачно вы выберете расположение ее узлов; один из подходов – сначала расставить все узлы равномерно на окружности, нарисовать все связи и посмотреть, как можно расположить узлы более удобно
- по невнимательности можно пропустить решение с минимальной стоимостью