

Тема 3.9 Неразрезные балки

1. Общие сведения о неразрезных балках
2. Уравнение трех моментов для неразрезной балки
3. Частные случаи применения уравнения трех моментов
4. Порядок расчета неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов

1. Общие сведения о неразрезных балках

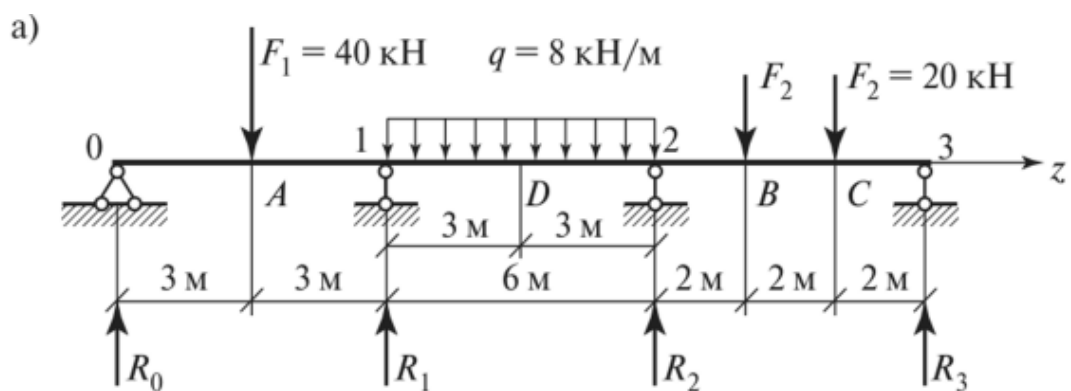
Многопролетная статически неопределимая (неразрезная) балка представляет собой сплошной брус постоянного (переменного) поперечного сечения, перекрывающий несколько пролетов и не имеющий шарниров (рис. 3.9.1, а). Промежуточные опоры неразрезной балки устраиваются шарнирно-подвижными, а крайние опоры могут быть либо шарнирно-неподвижными, либо жесткими защемлениями. Неразрезные балки устраиваются двухпролетными, трехпролетными и т.д., с консолями или без них.

От нагрузки, приложенной в произвольном пролете, возникают изгибающие моменты и поперечные силы во всех ее пролетах. Эта способность неразрезных балок перераспределять внутренние силы приводит к уменьшению значений пролетных моментов по сравнению с однопролетными балками и меньшему расходу материалов на их возведение. Благодаря высокой экономичности, надежности и повышенной жесткости неразрезные балки широко используют в строительстве, например в перекрытиях зданий, при устройстве проезжей части мостов, эстакад и т.д. К недостаткам относится возникновение дополнительных сил от неравномерной осадки опор и от изменения температурного режима.

Степень статической неопределимости неразрезной балки находят по формуле

$$L = C_{\text{оп}} - 3,$$

где L — степень статической неопределимости; $C_{\text{оп}}$ — число опорных стержней; 3 — три уравнения статического равновесия.



Основная система

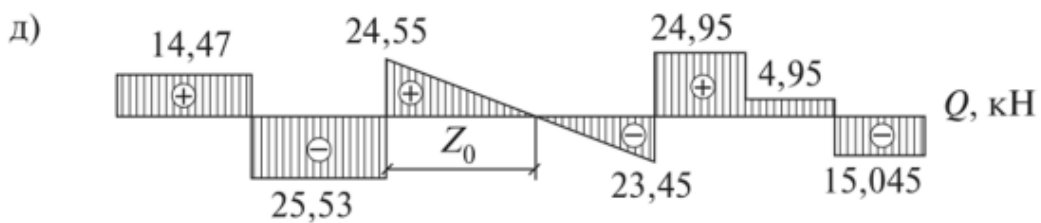
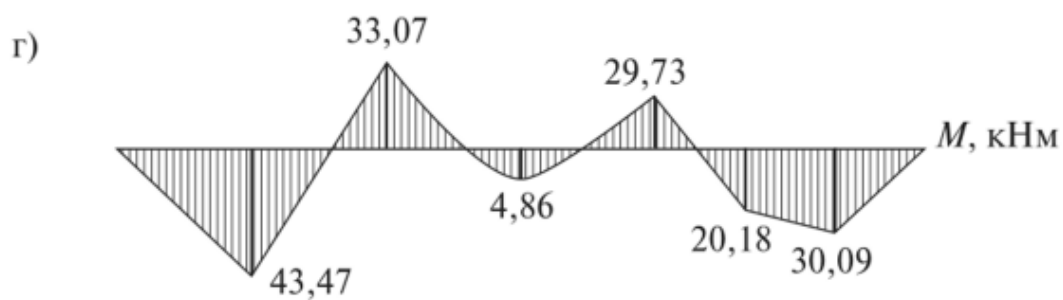
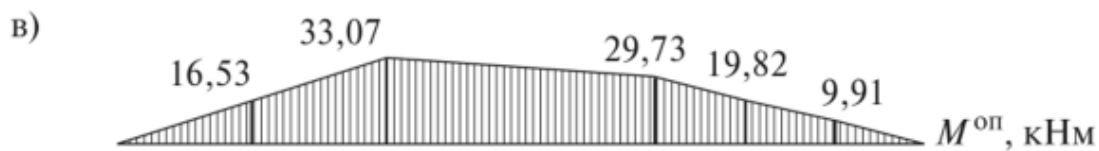
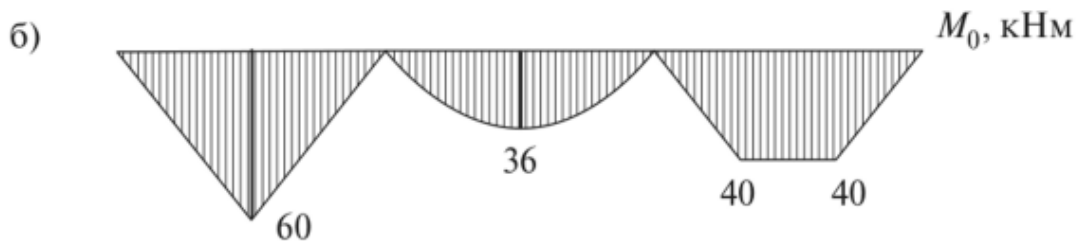
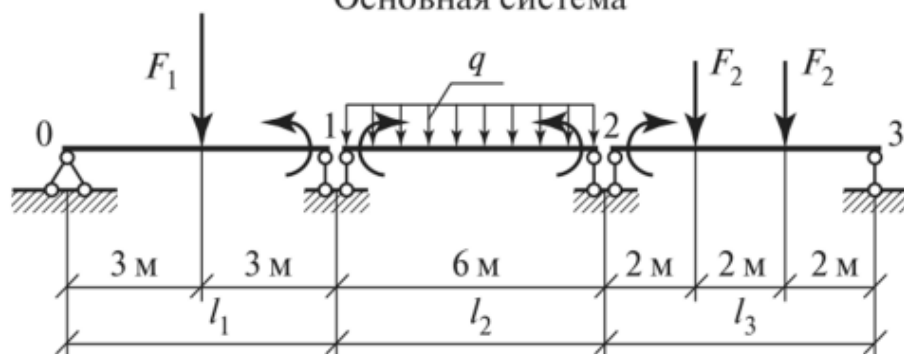


Рис. 3.9.1

2. Уравнение трех моментов

Следует иметь в виду, что нумерация опор и пролетов неразрезной балки может быть произвольной. Однако в большинстве случаев опоры принято обозначать слева направо числами $0, 1, 2, \dots, n-1, n, n+1$ и т.д., а длину пролетов (также слева направо) — $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ и т.д. Таким образом, номер пролета совпадает с номером его правой опоры. При данной нумерации уравнение трех моментов для опоры будет иметь вид

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi).$$

Если опору, для которой составляется уравнение трех моментов (опору n), назвать средней, опору $n-1$ — левой, $n+1$ — правой, пролет l_n — левым, а пролет l_{n+1} — правым (таково их взаимное расположение), то уравнение трех моментов для рассматриваемой опоры в общем примет вид

$$M_{\text{лев}}l_{\text{лев}} + 2M_{\text{ср}}(l_{\text{лев}} + l_{\text{пр}}) + M_{\text{пр}}l_{\text{пр}} = -6(B_{\text{лев}}^\Phi + A_{\text{пр}}^\Phi).$$

Фиктивные опорные реакции, стоящие в правой части уравнения трех моментов следует определить по формулам таблиц приложения 9.

При расчете неразрезной балки с шарнирными опорами уравнение трех моментов должно быть составлено для каждой промежуточной опоры.

3. Частные случаи уравнения трех моментов

Если одна из опор закреплена, то ее мысленно заменяют шарнирной, добавляя при этом фиктивный пролет $l \rightarrow 0$. В этом случае рассматриваемая крайняя опора становится как бы промежуточной и для нее составляется еще одно уравнение трех моментов.

При составлении уравнения трех моментов надо исключить член уравнения, содержащий момент над крайней шарнирной опорой, если со стороны этой опоры нет консоли. Если же консоль имеется, то момент над крайней опорой должен входить в составляемое уравнение как известная величина, численно равная алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных к консоли, относительно точки оси балки над этой опорой.

После решения полученной системы уравнений трех моментов станут известны значения всех опорных моментов. Дальнейший расчет ведем,

пользуясь формулами для определения изгибающего момента и поперечной силы в любом сечении балки.

4. Порядок расчета неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов

Пример. Для неразрезной балки (рис. 3.9.1, а) построить эпюры Q_y и M_x .

Дано: $T^7 = 40$ кН; $q = 8$ кН/м; $P_2 = 20$ кН.

Решение

Нумеруем опоры слева направо: 0, 1, 2, 3. Длину пролетов обозначим l_1, l_2, l_3 . Вычислим степень статической неопределимости: $L = C_{\text{оп}} - 3 = 2$, т.е. балка дважды статически неопределима.

Вычисляем для каждого пролета фиктивные опорные реакции B^{Φ} и A^{Φ} :

$$\begin{aligned} A_1^{\Phi} &= B_1^{\Phi} = F_1 l_1 / 16 = 40 \cdot 6^2 / 16 = 90 \text{ кНм}^2; \\ A_2^{\Phi} &= B_2^{\Phi} = q l_2^3 / 24 = 8 \cdot 6^3 / 24 = 72 \text{ кНм}^2; \\ A_3^{\Phi} &= B_3^{\Phi} = F_2 a (l_3 - a) / 16 = 20 \cdot 2 (6 - 2) / 16 = 80 \text{ кНм}^2. \end{aligned}$$

Для каждой из промежуточных опор составляем уравнение трех моментов:

$$\begin{aligned} \text{для опоры 1: } & M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 (B_1^{\Phi} + A_2^{\Phi}); \\ \text{для опоры 2: } & M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 (B_2^{\Phi} + A_3^{\Phi}). \end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения, учитывая, что $M_0 = M_3 = 0$, получаем систему уравнений для нахождения M_1 и M_2

$$\begin{cases} 2 M_1 (6 + 6) + M_2 \cdot 6 = -6 (90 + 72), \\ M_1 \cdot 6 + 2 M_2 (6 + 6) = -6 (72 + 80). \end{cases}$$

После упрощений получаем

$$\begin{cases} 4 M_1 + M_2 = -162, \\ M_1 + 4 M_2 = -152. \end{cases}$$

$$M_1 = 33,07 \text{ кНм};$$

$$M_2 = 29,73 \text{ кНм}.$$

Решая систему методом подстановки, находим:

4. Построение эпюры поперечных сил Q_y .

Ординаты эпюр для каждого пролета вычисляем по формуле

$$Q_y = Q_y^0 + \frac{M_{\text{пр}} + M_{\text{лев}}}{l},$$

где — балочная поперечная сила в сечении; M_m и M_l — соот-

у пр лев

ветственно опорные моменты на правой и левой опоре; l — пролет отдельной балки.

На участке с распределенной нагрузкой расстояние z_0 от опоры до сечения, в котором $Q_y = 0$ (если оно будет иметь место), определяется по формуле

$$z_0 = \frac{Q_m^{\text{пр}}}{q}.$$

Это сечение обозначим буквой D . Оно характерно тем, что эпюра изгибающих моментов в этом сечении имеет перегиб

("max или "min)'

Получаем:

$$Q_0^{\Pi} = Q_A^{\Pi} = 20 + \frac{-33,07 - 0}{6} = 14,47 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\Pi} = Q_1^{\Pi} = 14,47 - 40 = -25,53 \text{ кН};$$

$$Q_1^{\Pi} = \frac{8 \cdot 6}{2} + \frac{-29,73 + 33,07}{6} = 24,55 \text{ кН};$$

$$Q_2^{\Pi} = 24,55 - 8 \cdot 6 = -23,45 \text{ кН};$$

$$Q_2^{\Pi} = Q_B^{\Pi} = 20 + \frac{0 + 29,73}{6} = 24,95 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\Pi} = Q_C^{\Pi} = 24,95 - 20 = 4,95 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\Pi} = Q_3^{\Pi} = 4,95 - 20 = -15,05 \text{ кН}.$$

Строим соответствующую эпюру Q_y (рис. 3.9.1, *д*).

5. Построение эпюры изгибающих моментов.

Эпюра M_0 — эпюра моментов для каждого пролета, рассматриваемая как простая балка:

$$\text{пролет 1: } M_A = \frac{F_1 l_1}{4} = \frac{40 \cdot 6}{4} = 60 \text{ кН};$$

$$\text{пролет 2: } z_D = 3 \text{ м}; \quad M_D = \frac{q l_2}{2} \cdot z_D - \frac{q z_D^2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 3 - \frac{8 \cdot 3^2}{2} = 36 \text{ кН};$$

$$\text{пролет 3: } M_B = M_C = F_2 a = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}.$$

Соответствующая эпюра — на рис. 3.9.1, *б*.

Эпюра M^{on} — эпюра опорных моментов:

$$M_0 = 0;$$

$$M_A^{\text{оп}} = \frac{-33,07}{2} = -16,53 \text{ кНм};$$

$$M_1^{\text{оп}} = -33,07 \text{ кНм};$$

$$M_D^{\text{оп}} = \frac{-29,73 - 33,07}{2} = -31,14 \text{ кНм};$$

$$M_2^{\text{оп}} = -29,73 \text{ кНм};$$

$$M_B^{\text{оп}} = \frac{-29,73}{3} \cdot 2 = -19,82 \text{ кНм};$$

$$M_C^{\text{оп}} = \frac{-29,73}{3} = -9,91 \text{ кНм};$$

$$M_3^{\text{оп}} = 0.$$

Откладываем найденные значения, соединяем их ломаной линией.
Соответствующая эпюра — на рис. 3.9.1, в.

Эпюру изгибающих моментов для неразрезных балок строим, суммируя значения эпюр M^o и $M^{\text{оп}}$:

$$M_0 = 0;$$

$$M_A = 60 - 16,53 = 43,47 \text{ кНм};$$

$$M_1 = 33,07 \text{ кНм};$$

$$M_D = 36 - 31,15 = 4,86 \text{ кНм};$$

$$M_2 = 29,73 \text{ кНм};$$

$$M_B = 40 - 19,82 = 20,18 \text{ кНм};$$

$$M_C = 40 - 9,91 = 30,09 \text{ кНм}.$$

Соответствующая эпюра — на рис. 3.9.1, г.

6. Определяем опорные реакции в балке по формуле $R_n = Q_n + Q_{n+1}$ где $Q_n + Q_{n+1}$ — поперечные силы, действующие слева и справа от опоры.

$$R_0 = 14,47 \text{ кН};$$

$$R_1 = 25,53 + 24,55 = 50,08 \text{ кН};$$

$$R_2 = 23,45 + 24,95 = 48,4 \text{ кН};$$

$$R_3 = 15,045 \text{ кН}.$$

Находим:

7. Проверку правильности решения проведем, составив сумму проекций всех сил на ось у:

$$\sum F_y = R_0 - F_1 + \Pi_1 - ql_2 + R_2 - 2F_2 + R_3 = 14,47 - 40 + 50,08 - 8,6 + 48,4 - 40 + 15,045 = 128 + 127,995 = 0,005 \approx 0. \text{ Следовательно, задача решена правильно.}$$

Вопросы для самоконтроля

- 1. Какой вид имеет уравнение трех моментов?
- 2. Как определяют опорные реакции неразрезных балок?
- 3. Объясните порядок расчета неразрезных балок.
- 4. Как строится суммарная эпюра изгибающих моментов?
- 5. Как определяется максимальный изгибающий момент в пролете с равномерно распределенной нагрузкой?