

Partie I : Glissement et frottement solide*I.A. Quelques considérations générales sur l'énoncé des lois de Coulomb*

1. f_s ou f_d sont des nombres sans dimensions (rapport de normes de forces)

2. a) Soient deux référentiels R et R'. $\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}_e(M)$

avec $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$ (O' point fixe de R') : vitesse d'entraînement de M ou vitesse du point de R' coïncidant avec M à l'instant t.

b) La vitesse de glissement est indépendante du référentiel R.

Soit R' un autre référentiel

$$\vec{v}(I \in S_1/R) = \vec{v}(I \in S_1/R') + \vec{v}_e(I \in S_1)$$

de même pour $I \in S_0$.

Or $\vec{v}_e(I \in S_1) = \vec{v}_e(I \in S_0) = \vec{v}(I/R)$ en utilisant I point géométrique de contact entre les deux solides à l'instant t

$$\text{D'où } \vec{v}_g(I) = \vec{v}(I \in S_1/R') - \vec{v}(I \in S_0/R')$$

Résultat indépendant du référentiel.

3. a) Soient S_0 et S_1 les référentiels liés aux solides S_0 et S_1 .

$$\vec{v}(I/R) = \vec{v}(I/S_1) + \vec{v}_e(I) = \vec{v}(I/S_1) + \vec{v}(I \in S_1/R)$$

$$= \vec{v}(I/S_0) + \vec{v}_e(I) = \vec{v}(I/S_0) + \vec{v}(I \in S_0/R)$$

d'où $\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I/S_0) - \vec{v}(I/S_1)$: les deux vitesses $\vec{v}(I/S_0)$ et

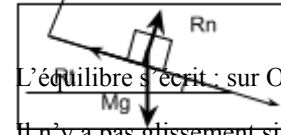
$\vec{v}(I/S_1)$ appartiennent au plan tangent entre les deux solides donc la vitesse de glissement également.

b) $\vec{R}$ correspond à la force appliquée par S_0 sur S_1 donc si $\vec{R}_n = R_n \vec{n}$ et $\vec{n}$ orientée de S_0 vers S_1 alors $R_n > 0$.

I.B. Mouvements sur un plan incliné

1. a) Le référentiel est galiléen.

Bilan des forces sur le pavé : le poids et l'action de contact entre le plan et le pavé.



L'équilibre s'écrit : sur OX : $mg \sin \alpha = R_t$ et sur OY : $mg \cos \alpha = R_n$

Il n'y a pas glissement si $R_t < f_s R_n$ soit pour $f_s > \tan \alpha$.

Le solide se met en mouvement si la condition précédente n'est pas vérifiée soit pour $f_s < \tan \alpha$

b) Il y a glissement du solide selon OX : $\vec{R}_t$ est orienté dans le sens du dessin.

Le théorème du centre d'inertie s'écrit : $m \vec{a}(G/R) = \vec{R} + m \vec{g}$

Sur OX : $m a = mg \sin \alpha - R_t$ sur OY : $0 = R_n - mg \cos \alpha$

Or il y a glissement donc $R_t = f_d R_n = f_d mg \cos \alpha$.

Le mouvement est donc uniformément accéléré avec $a = g(\sin \alpha - f_d \cos \alpha)$

Rmq : $f_d < f_s < \tan \alpha$ (voir a) donc $a > 0$.

Partie II – Etude d'un fil sur un arbre cylindrique*II.A Equilibre d'un fil sur un arbre cylindrique fixe*

1. $\vec{t}(\theta + d\theta) = \cos(d\theta) \vec{t}(\theta) - \sin(d\theta) \vec{n}(\theta) \approx \vec{t}(\theta) - d\theta \vec{n}(\theta)$ au premier ordre en $d\theta$.

2. Bilan des forces extérieures sur le tronçon MM' :

action de M'B : $\vec{T}(\theta + d\theta)$

action de AM : - $\vec{T}(\theta)$ (théorème de l'action et la réaction)

action de l'arbre : $d\vec{R}$

d'où la condition nécessaire d'équilibre : $\vec{T}(\theta + d\theta) - \vec{T}(\theta) + d\vec{R} = 0$

3. En remplaçant : sur $\vec{n}$: $dR_n = T(\theta)d\theta$

sur $\vec{t}$: $dR_t = -T(\theta + d\theta) + T(\theta) = -dT(\theta)$

4. On cherche la force F_B minimale à appliquer pour maintenir l'équilibre : on suppose donc $F_A > F_B$ donc $dT/d\theta < 0$. Si la corde glissait, ce serait de B vers A

donc $\vec{R}_t$ est orienté dans le sens de $\vec{t}$ (on retrouve $dR_t > 0$). La relation est alors : $dR_t = f_s dR_n$.

5. On a $dR_t = f_s T(\theta)d\theta = -dT(\theta)$ d'où l'équation différentielle vérifiée par $T(\theta)$:

$$\frac{dT}{d\theta} + f_s T(\theta) = 0.$$

6. La solution est $T(\theta) = F_A \exp(-f_s \theta)$ (quand $\theta = 0$, $T(\theta) = F_A$)

La relation entre F_B et F_A est : $F_B = F_A \exp(-f_s \alpha)$ (quand $\theta = \alpha$, $T(\theta) = F_B$)

7. Application numérique :

- $F_B/F_A = 0,152$
- $F_B < 100$ et $F_A = 10^4$ d'où $\alpha > 7,67$ rad
- Si la corde glisse vers B, la force de frottement est dirigée en sens inverse. $dT/d\theta$ devient > 0 . La force appliquée est alors plus importante que F_A : $F_B = F_A \exp(+f_s \alpha)$ soit $F_A = 10^6$ N !

II.B. Equilibre d'un fil sur un arbre cylindrique en rotation

1. Le fil est immobile dans R : $\vec{v}(I \in \text{fil} / R) = 0$

donc $\vec{v}_g(I) = -\vec{v}(I \in \text{arbre} / R) = -\vec{\Omega} \wedge \vec{OI} = -a\vec{\Omega} \vec{t}$

Si $\Omega > 0$, la vitesse de glissement est dans le sens opposé à $\vec{t}$

Si $\Omega < 0$, elle est dans le même sens.

2. L'équation différentielle est la même qu'en II.A en remplaçant f_s par f_d . (même orientation pour R_t).

3. Application numérique :

- $F_B/F_A = 0,208$
- $\alpha_0 = 9,21$ rad (environ 1 tour et demi)
- la vitesse de glissement du fil sur l'arbre reste dans le même sens : rien ne change pour R_t et $F_B = 100$ N. Il est alors possible de déplacer la corde dans le sens de $\vec{t}$
- La force de frottement de glissement aide à maintenir l'équilibre et même déplacer un objet lourd si l'arbre est en rotation.

Partie III. Moteur électrique à courant continu

III. A Modélisation d'un moteur à courant continu

1. a) On peut raisonner sur les puissances : $P_{mec} = M \cdot \Omega$ et $P_{el} = e \cdot i$

donc si $M = \varphi i$ alors $|e| = \varphi \Omega$ et inversement.

b) Dans le cas d'un moteur, ($i > 0$, $\Omega > 0$) l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique donc $P_{el} < 0$ quand $P_{mec} > 0$ d'où le signe - dans l'expression de e pour M donné. Le moteur est un transducteur électromécanique : $P_{el} + P_{mec} = 0$.

2. a) On applique au rotor le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \varphi i - \varepsilon M_0 - \gamma \Omega \text{ (équation mécanique)}$$

On applique la loi des mailles dans le circuit électrique :

$$E = Ri + \varphi \Omega \text{ (équation électrique)}$$

D'où :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \varphi E/R - \varepsilon M_0 - \Omega(\gamma + \varphi^2/R)$$

On veut passer de 0 à Ω positif d'où $d\Omega/dt > 0$ et $\varepsilon = 1$ à $t > 0$

Il faut $E > M_0 R / \varphi$.

b) On intègre l'équation différentielle obtenue en a).

$$\Omega = \Omega^\infty (1 - \exp(-t/\tau))$$

$$\text{avec } \Omega^\infty = (\varphi E/R - M_0)/(\gamma + \varphi^2/R) \quad \text{et } \tau = J / (\gamma + \varphi^2/R)$$

c) On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par Ω .

D'où :

$$E i = d/dt (1/2 J \Omega^2) + R i^2 + (M_0 + \gamma \Omega) \Omega$$

La puissance fournie par le générateur E se retrouve sous forme de puissance cinétique (de rotation), de puissance perdue par effet Joule (dans R) et par les frottements.

III.B Principe physique d'un moteur à courant continu

1. a) Les directions et les sens du champ magnétique en M de CD et en M' de $C'D'$ sont les mêmes (champ radial sortant pour M et rentrant pour M')

b) pour $\vec{dl}$ de CD , la force de Laplace est $d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} = i B dz \vec{e}_y$

$$\text{donc } \vec{F}_{CD} = i B b \vec{e}_y$$

pour $C'D'$ le sens de i est inversé, celui du champ est le même donc

$$\vec{F}_{C'D'} = -i B b \vec{e}_y$$

$$\text{On a } \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{C'D'} = 0$$

c) pour $\vec{dl}$ de CD , $d\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = i B a d z \vec{e}_z - i B z d z \vec{e}_x$

$$\text{donc } M_{CD,\Delta} = i B a b$$

pour $\vec{dl}$ de $C'D'$, on retrouve la même valeur sur l'axe.

D'où $M_1 = 2i B a b = i \varphi_1$ avec $\varphi_1 = B 2a b = B S$, S surface d'une spire : φ_1 représente le flux maximal qui traverse une spire.

2. a) Tant que, pour M appartient à CD , $\vec{OM} = a \vec{e}_x + z \vec{e}_z$, le calcul de M_1 reste identique, et φ_1 reste identique, indépendant de la position de la spire.

Ceci reste vrai tant que le brin CD reste dans le domaine $y > 0$. Quand il passe dans

le domaine $y < 0$, alors pour M appartient à CD , $\vec{OM} = -a \vec{e}_x + z \vec{e}_z$: le signe de M_1 est alors inversé.

b) Si i reste constante dans le sens CD , sur un tour M_1 serait > 0 pour un demi-tour, < 0 pour l'autre demi-tour : donc $\langle M_1 \rangle = 0$.

c) L'intérêt de la commutation est de garder le même signe pour M_1 :

$$\langle M_1 \rangle = i \varphi_1.$$

d) Le rotor est constitué de N spires : on ajoute tous les moments M_1 qui seront tous identiques si on peut considérer l'épaisseur faible devant a pour une commutation efficace.

3. a) pour M appartient à CD , le champ électromoteur

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -a B \Omega \vec{e}_z$$

pour M' appartient à $C'D'$, $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = a B \Omega \vec{e}_z$.

$$e_{AA'} = \int_{AA'} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = -Ba\Omega b + (-Ba\Omega b) \text{ soit } e_{AA'} = -2Ba\Omega b.$$

b) On peut donc poser $e_{AA'} = -\varphi_2 \Omega$ avec $\varphi_2 = \varphi_1 = BS$.

c) Pour les N spires, on a une f.e.m. induite $e = -\varphi \Omega$. Le rotor a une résistance R et on a négligé l'auto-induction d'où le schéma électrique équivalent :

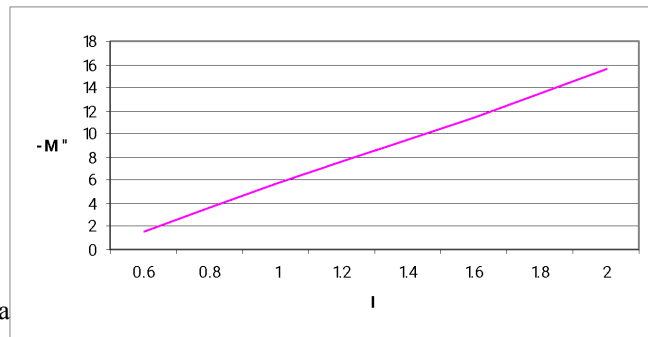
Partie IV. Fil sur un rotor entraîné par un moteur.

IV.A. Mesure du couple d'un moteur à courant continu.

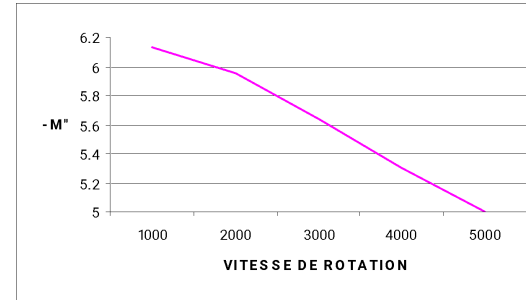
1. On a $T_2 = k_2 y_2$ et $T_1 = k_1 y_1$ à l'équilibre du fil. D'où $M'' = (T_2 - T_1)a$ soit $M'' = (k_2 y_2 - k_1 y_1)a$.

2. La fréquence de rotation étant constante et positive, le théorème du moment cinétique appliqué au rotor donne : $0 = \varphi i - M_0 - \gamma \Omega + M'' = \varphi i + \text{cte} + M''$ pour $\Omega = \text{cte}$.

On calcule M'' et on trace $-M''$ en fonction de i pour $\Omega = 3000 \text{ tr/min}$: on obtient une droite de pente φ : On trouve $\varphi = 10^{-2} \text{ Wb}$.



3. On tra



En éliminant le premier point (1000 tours/min), on trouve $\gamma = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N.m.s.rad}^{-1}$

4. On calcule M_0 par exemple pour $\Omega = 4000 \text{ tours/min}$: $0 = \varphi i - M_0 - \gamma \Omega + M''$ d'où $M_0 = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$

5. a) d'après la partie II, on a $T_2 = T_1 \exp(-f_d \pi)$

d'où $f_d = (1/\pi) \ln(T_1/T_2) = 0,5$ (même valeur qu'en II...)

b) On constate que le rapport y_1/y_2 est sensiblement constant donc on retrouve $f_d = 0,5$: f_d caractérise bien le frottement dynamique fil/rotor.

IV.B. Détermination d'un point de fonctionnement

1. Le fil et la masse m sont immobiles : $T_1 = mg$ et $T_2 = T_1 \exp(-f_d \pi)$ ($\Omega > 0$)

D'où $M'' = mga(\exp(-f_d \pi) - 1)$

2. a) Application numérique : $M'' = -3,11 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$

b) $0 = \varphi i - M_0 - \gamma \Omega + M''$ (Ω constante) d'où $\Omega = 487 \text{ rad/s}$

c) $E = Ri + \varphi \Omega$ d'où $R = (E - \varphi \Omega)/i$ $R = 0,17 \Omega$

d) rendement = Puissance utile / Puissance fournie = $(Ei - Ri^2)/Ei = 97 \%$

3. $E < 0$ donc $i < 0$ et $\Omega < 0$: $M'' = mga(\exp(f_d \pi) - 1) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$

On a $0 = \varphi i + M_0 - \gamma \Omega + M''$ et $E = Ri + \varphi \Omega$

D'où $0 = \varphi(E - \varphi \Omega)/R + M_0 - \gamma \Omega + M''$ et $\Omega = (\varphi E/R + M'' + M_0)/(\varphi^2/R + \gamma)$

d'où $\Omega = -466 \text{ rad/s}$ et $i = -2 \text{ A}$

FIN