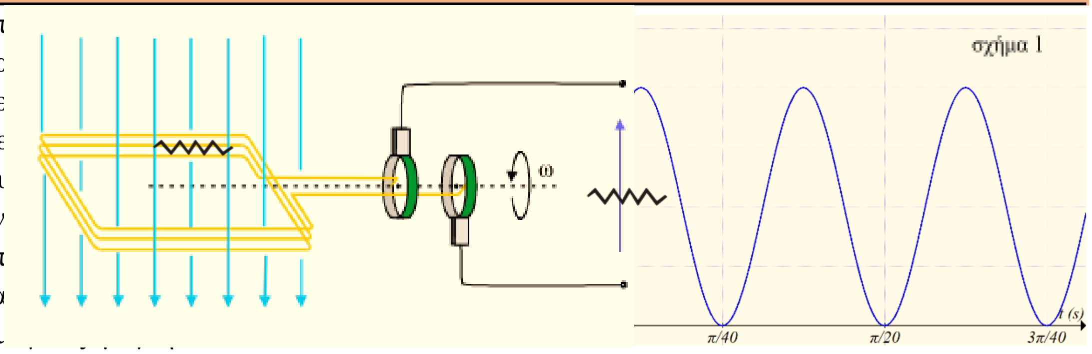
Η στιγμιαία ισχύς και ένα στρεφόμενο πλαίσιο με αντίσταση

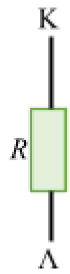
Στ πο ρε με συ εν στ τα ομ



παρουσιάζει αντίσταση $R_\Pi = 2\Omega$, έχει πλευρά $\alpha = 0{,}5m$ και $N = 120$ *σπείρες.*

σχήμα 2

R_Π



α) Υπολογίστε την περίοδο και τη γωνιακή συχνότητα της συνάρτησης ισχύος – χρόνου, και γράψτε την εξίσωση $P = f(t)$ στο S.I.

β) Γράψτε τις χρονικές εξισώσεις της τάσης στα άκρα του αντιστάτη και της ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο στρεφόμενο πλαίσιο και κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

γ) Να βρείτε το μέτρο B της έντασης του μαγνητικού πεδίου και την αλγεβρική τιμή της μαγνητικής ροής, που διέρχεται από το πλαίσιο τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/160s$.

δ) Αν θέλουμε να διπλασιάσουμε την παρεχόμενη ενέργεια ανά περίοδο, ποια αλλαγή στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου πρέπει να κάνουμε;

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{n}$ είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{B}$ της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Δίνεται επίσης $\eta\mu^2(\omega t) = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2}$

Απάντηση

α) Η περίοδος αυτής της συνάρτησης μπορεί να βρεθεί από τη γραφική παράσταση απευθείας, παρατηρώντας την περιοδικότητα της γραφικής παράστασης:

$T' = \dfrac{\pi}{40}s$, από την οποία $\omega' = \dfrac{2\pi}{T'} = \dfrac{2\pi}{\pi/40} = 80rad/s$

Αν υ και i οι στιγμιαίες τιμές τάσης και έντασης ρεύματος στον αντιστάτη, η εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνεται θα είναι

$$P = \upsilon \cdot i \Leftrightarrow P = V\eta\mu(\omega t)\cdot I\eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow P = V\cdot I\cdot \eta\mu^2(\omega t) \Leftrightarrow P = P_{max}\cdot\eta\mu^2(\omega t) \quad (1)$$

Αν θέσουμε $\eta\mu^2(\omega t) = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2}$, η εξίσωση (1) γράφεται

$$P = P_{max}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2} \Leftrightarrow P = \frac{P_{max}}{2} - \frac{P_{max}}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t) \quad (2)$$

Η τελευταία μας δείχνει ότι η στιγμιαία ισχύς έχει γωνιακή συχνότητα

$$\omega' = 2\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\omega'}{2} \Leftrightarrow \omega = 40 rad/s$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση $P=f(t)$, με δύο ισοδύναμες μορφές

Από την (1) $P = 4400 \cdot \eta\mu^2(40t)$ (S.I.) και

από τη (2) $P = \frac{4400}{2} - \frac{4400}{2}\sigma\upsilon\nu(80t) \Leftrightarrow$ $P = 2200 - 2200\sigma\upsilon\nu(80t)$ (S.I)

β) Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα ας προσέξουμε ότι:

Ο νόμος Ohm σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος, που περιλαμβάνει πηγή και αντιστάτες ισχύει για:

- Στιγμιαίες τιμές:
- Πλάτη:
- Ενεργές τιμές:

Από τη μέγιστη ισχύ που καταναλώνεται στον αντιστάτη μπορούμε να βρούμε το πλάτος I της έντασης του ρεύματος:

$$P_{max} = V \cdot I \Leftrightarrow P_{max} = I^2 \cdot R \Leftrightarrow I = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} \Leftrightarrow I = \sqrt{\frac{4400}{22}} \Leftrightarrow I = \sqrt{200} \Leftrightarrow I = 10\sqrt{2} A.$$

ενώ το πλάτος της τάσης στα άκρα του αντιστάτη – άρα και του πλαισίου – είναι

$$V = I \cdot R \Leftrightarrow V = 10\sqrt{2} \cdot 22 = 220\sqrt{2} V$$

Επομένως η χρονική εξίσωση της τάσης θα είναι

$$\upsilon = V \cdot \eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow \quad \upsilon = 220\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40t) \text{ (S.I.)}$$

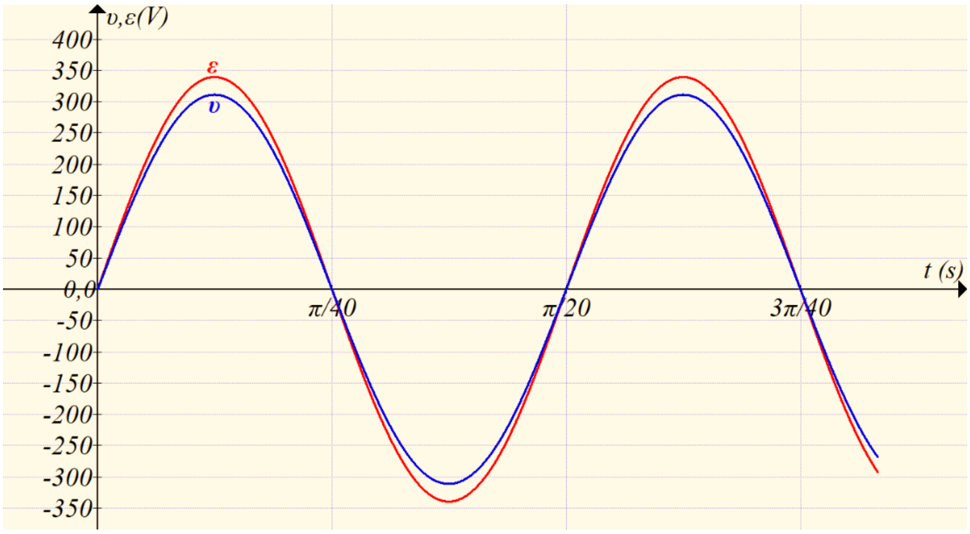
Η τάση στα άκρα του αντιστάτη είναι και η τάση στα άκρα του πλαισίου-πηγή, άρα αν E το πλάτος της ΗΕΔ που παράγεται από την περιστροφή του πλαισίου, μπορούμε να γράψουμε

$$V = E - IR_{\Pi} \Leftrightarrow E = V + IR_{\Pi} \Leftrightarrow E = 220\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \cdot 2 \Leftrightarrow E = 240\sqrt{2} V$$

Επομένως η χρονική εξίσωση της στιγμιαίας τιμής ε της ΗΕΔ στο πλαίσιο θα είναι

$$\varepsilon = E \cdot \eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 240\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40t) \text{ (S.I.)}$$

Οι γραφικές παραστάσεις θα είναι:



γ) Από τη σχέση που δίνει το πλάτος της επαγόμενης στο πλαίσιο ΗΕΔ, έχουμε

$$E = BAN\omega \Leftrightarrow B = \frac{E}{AN\omega} \Leftrightarrow B = \frac{240\sqrt{2}}{0,5^2 \cdot 120 \cdot 40} \Leftrightarrow B = \frac{2\sqrt{2}}{0,25 \cdot 40} \Leftrightarrow$$

$$B = 0,2\sqrt{2}T$$

Η χρονική εξίσωση της μαγνητικής ροής είναι

$$\Phi = BAN \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Leftrightarrow \Phi = 0,2\sqrt{2} \cdot 0,5^2 \cdot 120 \cdot \sigma\upsilon\nu(40t) \xrightarrow{t_1=\pi/160s}$$

$$\Phi = 6\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(40 \cdot \frac{\pi}{160}) \Leftrightarrow \Phi = 6\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \Phi = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Phi = 6Wb$$

δ) Η μέση ολική ισχύς που προσφέρει το πλαίσιο στο κύκλωμά του θα είναι

$$\overline{P}_{o\lambda} = E_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \Leftrightarrow \overline{P}_{o\lambda} = E_{\varepsilon\nu} \cdot \frac{E_{\varepsilon\nu}}{R_{o\lambda}} \Leftrightarrow \overline{P}_{o\lambda} = \frac{E_{\varepsilon\nu}{}^2}{R_{o\lambda}} \Leftrightarrow \overline{P}_{o\lambda} = \frac{(E/\sqrt{2})^2}{R_{o\lambda}} \Leftrightarrow \overline{P}_{o\lambda} = \frac{E^2}{2R_{o\lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{P}_{o\lambda} = \frac{B^2A^2N^2}{2R_{o\lambda}}\omega^2 \quad (3)$$

Η ενέργεια ανά περίοδο, που προσφέρει το στρεφόμενο πλαίσιο σε όλο το κύκλωμα θα είναι:

$$W_{o\lambda} = \overline{P}_{o\lambda} \cdot T \xrightarrow{(3)} W_{o\lambda} = \frac{B^2A^2N^2}{2R_{o\lambda}}\omega^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow W_{o\lambda} = \frac{2\pi B^2A^2N^2}{2R_{o\lambda}}\omega \quad (4)$$

Από την (4) είναι φανερό ότι τα ποσά $W_{o\lambda}$ και ω είναι ανάλογα, άρα αρκεί να **διπλασιάσουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου.**

Σχόλια

α) Η στιγμιαία ΗΕΔ επαγωγής σε πλαίσιο με εσωτερική αντίσταση, που εδώ συμβολίσαμε ε, είναι διαφορετική από τη στιγμιαία τάση υ στα άκρα του, που είναι και η «ωφέλιμη» για να αποδοθεί στο εξωτερικό κύκλωμα.

β) Αλλαγή στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου επιδρά στην εναλλασσόμενη τάση:

i) στο πλάτος $E = BAN\omega$ και κατ΄επέκταση στην ενεργό τιμή $E_{\varepsilon\nu} = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{BAN\omega}{\sqrt{2}}$

ii) στην περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ανδρέας Ριζόπουλος