

Выполнение задач на построение геометрических фигур. Измерение геометрических величин.

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Одной из важных задач геометрии является построение фигур с 3 данными свойствами при помощи чертежных инструментов. Мы будем рассматривать только такие построения, которые можно выполнить помощью циркуля и линейки. Задачи на построение - это, пожалуй самые древние математические задачи, они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений. Учителю начальных классов эти знания и умения необходимы так как при изучении геометрического материала можно приобщать детей к построению фигур с помощью циркуля и линейки, но дел это надо грамотно, с учетом правил решения задач на построение в геометрии.

Существуют условия, которые надо соблюдать при построении фигур с помощью циркуля и линейки.

Циркуль - это инструмент, позволяющий построить:

- а) окружность, если построены ее центр и отрезок, равный радиусу - (или его концы);
- б) любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены ее центр и концы этих дуг.

Линейка используется как инструмент, позволяющий построить:

- а) отрезок, соединяющий две построенные точки;
- б) прямую, проходящую через две построенные точки;
- в) луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

С помощью циркуля и линейки можно также изобразить:

- а) любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют;
- б) точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре;
- в) точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре.

Элементарные задачи на построение

С помощью основных построений решаются некоторые задачи, достаточно простые и часто встречающиеся при решении других, более сложных. Такие задачи считаются элементарными и описания их решения, если они

встречаются при решении более сложных, не дается. Выбор элементарных задач является условным.

Задача на построение считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

Рассмотрим некоторые элементарные задачи на построение.

1. Построить на данной прямой отрезок CD , равный данному отрезку AB .

Возможность такого построения вытекает из аксиомы откладывания отрезка. С помощью циркуля и линейки оно осуществляется следующим образом. Пусть даны прямая a и отрезок AB . Отмечаем на прямой точку C и строим с центром в точке C окружность радиусом, равным отрезку AB . Точку пересечения окружности с прямой a обозначаем D . Получаем отрезок CD , равный AB .

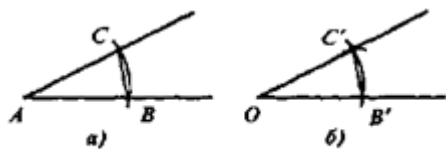


Рис. 149

2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

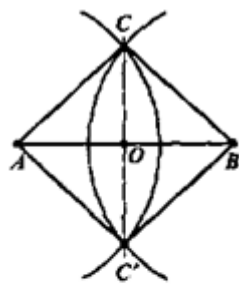


Рис. 150

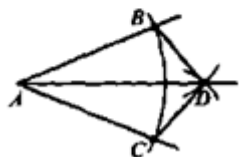


Рис. 151

Пусть даны угол A и полупрямая с начальной точкой O . Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла (рис. 149, а). Точки пересечения окружности со сторонами угла обозначим B и C . Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O (рис. 149, б). Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B' . Опишем окружность с центром B' и радиусом $B'C$. Точка C пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Построенный угол $B'OC$ равен углу BAC , так как это соответствующие углы равных треугольников ABC и $B'OC$.

1. Найти середину отрезка.

Пусть AB - данный отрезок. Построим две окружности одного радиуса с центрами A и B (рис. 150). Они пересекаются в точках C и C' , лежащих в разных полуплоскостях относительно прямой AB . Проведем прямую CC' . Она пересечет прямую AB в точке O . Эта точка и есть середина отрезка AB .

Действительно, треугольники SAC' и SBC' равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов ASO и OSB . Значит, отрезок SO - биссектриса равнобедренного треугольника ASB

и, следовательно, его медиана, т.е. точка O - середина отрезка AB .

2. Построить биссектрису данного угла.

Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 151). Пусть B и C - точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C описываем окружности одного радиуса. Пусть D - точка их пересечения, отличная от A . Тогда полупрямая AD и есть биссектриса угла A . Докажем это. Для этого рассмотрим треугольники ABD и ACD . Они равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство соответствующих углов DAB и $DA C$, т.е. луч AD делит угол BAC пополам и, следовательно, является биссектрисой.

1. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

Пусть даны точка O и прямая a . Возможно два случая:

1. точка O лежит на прямой a ;
2. точка O не лежит на прямой a .

В первом случае построение выполняется так же, как и в задаче 4, потому что перпендикуляр из точки O , лежащей на прямой, - э биссектриса развернутого угла (рис. 152).

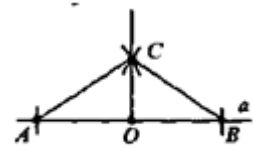


Рис. 152

Во втором случае из точки O как из центра проводим окружность, пересекающую прямую a (рис. 153), а затем из точек A и B тем же радиусом проводим еще две окружности. Пусть O' - точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O . Прямая OO' и есть перпендикуляр данной прямой a . Докажем это.

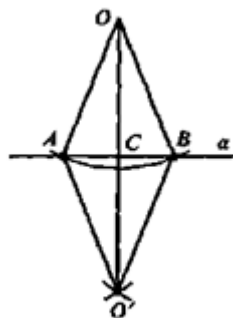


Рис. 153

Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO' . Треугольники AOB и $AO'M$ равны по трем сторонам. Поэтому угол OAC равен углу $O'AC$ и, значит, треугольники OAC и $O'AC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда их углы ACO и ACO' равны. А так как углы смежные, то они прямые. Таким образом, OC есть перпендикуляр к прямой a .

Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Пусть даны прямая a и точка A вне этой прямой (рис. 154). Возьмем на прямой a какую-нибудь точку B и соединим ее с точкой A .

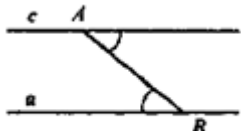


Рис. 154

Через точку A проведем прямую c , образующую с AB такой же угол, какой AB образует с данной прямой a , но на противоположной стороне от AB . Построенная прямая будет параллельна прямой a , что следует из равенства накрест лежащих углов, образованных при пересечении прямых a и c секущей AB .

2. **Постройте с помощью циркуля и линейки сумму и разность двух данных: а) отрезков; б) углов.**

3. Разделите данный угол на 4 равных части.

4. Дан треугольник ABC . Постройте другой, равный ему, треугольник ABD .

5. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

Этапы решения задачи на построение

Решение задачи на построение обычно включает четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Анализ. На этом этапе осуществляется поиск решения задачи. Его конечная цель - установление последовательности, алгоритма, состоящего из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры. Как и решение геометрической задачи на вычисление и доказательство, поиск такого алгоритма сопровождается чертежом, иллюстрацией, помогающими установить связи и зависимости между данными и искомыми фигурами.

Построение. Этот этап решения представляет собой непосредственную реализацию на чертеже найденного алгоритма с помощью выбранных инструментов построения.

Доказательство. Его цель - доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, т.е. удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Исследование. Этот этап решения состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решение; если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

Проиллюстрируем эти этапы на конкретном примере.

Задача. Построить параллелограмм по основанию a , высоте h и одной из диагоналей d .

Согласно условию, данными являются отрезки, представляющие основание, высоту и диагональ параллелограмма (рис. 155). Все эти фигуры считаются уже построенными, и поэтому объяснение не требуется.



Анализ. Выполним чертеж-иллюстрацию, считая, что искомый параллелограмм $ABCD$ уже построен (рис. 156). Отмечаем на чертеже данные элементы: $BC \sim a$, $BH = h$, $BD \sim d$.

Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны AD и BC лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте h . Поэтому можно построить треугольник ABD и затем достроить его до параллелограмма $ABCD$. Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

1. Строим параллельные прямые MK и PQ на расстоянии h друг от друга. На прямой MK откладываем отрезок $AD = a$.
2. Из точки D , как из центра, радиусом d проводим окружность и находим точку B ее пересечения с прямой PQ .
3. На луче BQ откладываем отрезок $BC = a$.
4. Строим отрезки AB и CD .

Построение. Все этапы алгоритма построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов (рис. 157).

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AD и BC параллельны, так как лежат на параллельных прямых MK и PQ . Эти же стороны равны по построению: $AD = BC = a$. Значит, $ABCD$ - параллелограмм, у которого $AD = a$, $BD \sim d$, а высота равна h , так как расстояние между параллельными прямыми MK и PQ равно h (по построению). Следовательно, $ABCD$ - искомый параллелограмм.

Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма $ABCD$ непосредственно по шагам алгоритма построения.

1. Параллельные прямые MK и PQ на расстоянии h всегда можно построить, и притом единственным образом.
2. Построить отрезок $AD = a$ на прямой MK также всегда можно, и притом единственным образом.

3. Окружность, проведенная из центра D радиусом d , будет иметь общие точки с прямой PQ только тогда, когда $d > h_a$. Если $d = h_a$ то получится одна общая точка B , если же $d > h_a$ то две общие точки B и S' .

4.5) Эти построения всегда однозначно выполнимы.

Таким образом, решение возможно, если $d > h_a$. Если $d = h_a$ то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$, то два решения.