

PREMIER PROBLEME : ELECTROSTATIQUE ET MAGNETOSTATIQUE1^{ère} partie : condensateur cylindrique

1 – Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$; le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal à la charge contenue dans le volume délimité par S divisée par ϵ_0 .

2 – La surface est un cylindre fermé d'axe vertical passant par O et de hauteur l.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \times 2\pi r l = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q \times l}{h \times \epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad E(r) = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}$$

$$3 - a) \quad \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$b) \quad \vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{et} \quad \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2$$

$$4 - a) \quad U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} \quad \text{implique} \quad C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad \text{et} \quad C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$b) \text{ A.N. : } C = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 40 \text{ pF}$$

$$5 - \text{Si } R_2 - R_1 = e \ll R_1, \text{ alors } C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_1 + e}{R_1} \right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right)} \quad \text{soit} \quad C = \frac{2\pi \epsilon_0 h R_1}{e}$$

le condensateur plan est équivalent à un condensateur plan de capacité $C = \epsilon_0 \frac{S'}{e'}$ avec $e' = e$ et $S' = 2\pi h R_1$ (C' est d'ailleurs la surface du cylindre intérieur).

6 – a) E est maximal quand r est petit, c'est-à-dire quand $r \rightarrow R_1$.

$$\text{On a alors } E_{\text{max}} = E_0 = \frac{Q}{2\pi h R_1 \epsilon_0} \quad \text{et} \quad V_{\text{max}} = R_1 E_0 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$b) \quad V_{\text{max}} = 2,08 \cdot 10^5 \text{ V} \approx 208 \text{ kV}$$

2^{ème} partie : câble coaxial

1 – Théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. La circulation du champ magnétostatique le long d'un circuit fermé C est égale à μ_0 multiplié par le courant traversant la surface orientée s'appuyant sur le contour C.

2 – a) Quelque soit le point M, le plan MOz est plan de symétrie pour la distribution de courants. Donc le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan en M. $\vec{B}$ est donc orthoradial, c'est-à-dire $\vec{B} = B \vec{e}_\theta$

b) Il y a invariance par translation parallèle à Oz, donc B ne dépend pas de z.

Il y a invariance par rotation autour de Oz, donc B ne dépend pas de θ .

On a alors $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$

c) Les lignes de champ sont colinéaires à $\vec{B}$ en tout point, ce sont donc des cercles centrés sur l'axe Oz.

3 – a) Si $r > R_3$, $I_{\text{int}} = 0$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

b) Le câble coaxial ne crée pas de champ à l'extérieur (contrairement à un fil simple), donc ne perturbe pas les circuits avoisinants (Inversement, il n'est pas non plus perturbé par les éléments extérieurs).

$$4 - \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S} = I_1 \quad \text{d'où} \quad \vec{j}_1 = \frac{I_1}{\pi R_1^2} \vec{e}_z = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z$$

$$\iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S} = I_2 \quad \text{d'où} \quad \vec{j}_2 = \frac{I_2}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z$$

$$5 - a) \text{ Si } r < R_1, \text{ alors } I_{\text{int}} = I \frac{r^2}{R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$b) \text{ Si } R_1 < r < R_2 \text{ alors } I_{\text{int}} = I \quad \text{et} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$c) \text{ Si } R_2 < r < R_3 \text{ alors } I_{\text{int}} = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \quad \text{et}$$

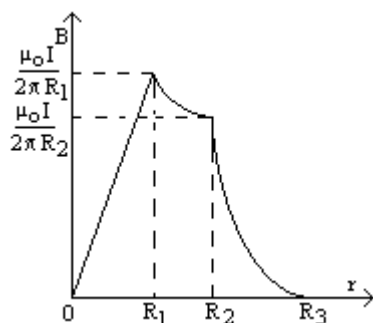
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\frac{R_3^2}{r} - r}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

6 – La composante tangentielle de $\vec{B}$ est continue à la traversée des interfaces car il n'y a pas

de courant surfacique. On a en $r = R_1$: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ (calculé avec a) et b)) et en $r = R_2$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} \quad (\text{calculé avec b) et c)).$$

7 –



DEUXIEME PROBLEME : MECANIQUE GRAVITATIONNELLE

1 – Champ gravitationnel

$$\vec{G} = -\frac{G m}{r^2} \vec{u}_{OM}$$

2 – a) La masse est ici uniformément répartie sur un volume sphérique, c'est-à-dire que la masse volumique ρ est constante quelque soit $r \leq R$. Pour la terre, la masse volumique n'est pas constante et ce n'est pas une sphère (aplatissement aux pôles).

b) En utilisant le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel, on a :

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi G M_{\text{int}} = 4\pi G M_T \quad \text{si } r > R_T.$$

$$\vec{G} = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{u}_{OM}$$

On a alors

$$c) \quad g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} \quad \text{A.N. : } g_0 = 9.80 \text{ m.s}^{-2}$$

$$g_L = \frac{G M_T}{d^2} \quad \text{A.N. : } g_L = 2.70.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

$$3 - a) \quad \vec{F}_{OM} = -\frac{G M_T m}{r^2} \vec{u}_{OM} \quad \text{Cette force est attractive bien sûr.}$$

b) La terre subit la force $\vec{F}'_{OM} = -\vec{F}_{OM}$ de la part de cet objet (d'après le principe de l'action et de la réaction ou des actions mutuelles).

$$\vec{F}'_{OM} = \frac{G M_T m}{r^2} \vec{u}_{OM}$$

4 – a) $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{v}$ la dérivée du moment cinétique en O est nulle car la force est centrale, $\vec{\sigma}_0$ est donc constant et perpendiculaire au plan $(\vec{OM}, \vec{v})$ et le mouvement a lieu dans ce plan.

b) Si le mouvement est circulaire de centre O, $\sigma_0 = OM \times v = r.m.v = \text{cte}$. Comme $r = \text{cte}$, on en déduit que $v = \text{cte}$ (On peut également utiliser le théorème de l'énergie cinétique).

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F}_{OM}$. En projetant sur $\vec{u}_{OM}$, on obtient (avec la composante normale $-a_N$ du repère de Frenet) :

$$-m \frac{v^2}{r} = -G \frac{M_T m}{r^2} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G M_T}}$$

La période est définie par

c) Pour la lune, $v = \sqrt{G \frac{M_T}{d}} = 1019 \text{ m.s}^{-1}$ et $T = \frac{2\pi d^{3/2}}{\sqrt{G M_T}} = 2,37.10^6 \text{ s} \approx 27,4 \text{ jours.}$

5 – a) $m\ddot{x} = mg$ d'où $\ddot{x} = g$ et $z = \frac{1}{2}gt^2 + h$

b) $h_1 = z - h = \frac{1}{2}gt^2$. Pour $t = 1 \text{ s}$, $h_1 = \frac{g}{2}$: h_1 est indépendant de h .

c) Pour $g = g_0$, $h_1 = \frac{g_0}{2} = \underline{4,90 \text{ m.}}$

Pour $g = g_L$, $h_1 = \frac{g}{2} = 1,35.10^{-3} \text{ m} = \underline{1,35 \text{ mm.}}$

6 – En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OAB, on a : $OB^2 = OA^2 + AB^2$
c'est-à-dire $(d+h_1)^2 = d^2 + (v.\Delta t)^2 = d^2 + v^2$ avec $\Delta t = 1 \text{ s}$.

$$v = \sqrt{(d+h_1)^2 - d^2} = d\sqrt{\left(1 + \frac{h_1}{d}\right)^2 - 1}$$

On a donc

Si $h_1 \ll d$, alors $v = d\sqrt{1 + \frac{2h_1}{d} - 1}$, soit $v = \sqrt{2dh_1}$

Avec la question 4c, on a $v = \sqrt{G \frac{M_T}{d}}$ avec $g_L = \frac{G M_T}{d^2}$, soit $v = \sqrt{d.g_L} = \sqrt{2d.h_1}$: on trouve le même résultat.

La chute libre de la lune ramène donc sa trajectoire sur un cercle centré en O.

TROISIEME PROBLEME : ETUDE D'UN DISPOSITIF INTERFERENTIEL

1 – a) $E_{\text{tot}}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2$ car les deux champs sont parallèles.

$$E_{\text{tot}}^2 = E_{10}^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t - \Phi_1) + E_{20}^2 \cdot \cos^2(\omega_2 t - \Phi_2) + 2E_{10} \cdot E_{20} \cdot \cos(\omega_1 t - \Phi_1) \cdot \cos(\omega_2 t - \Phi_2)$$

On a donc $\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle = \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + 2\langle E_{10} \cdot E_{20} \cdot \cos(\omega_1 t - \Phi_1) \cdot \cos(\omega_2 t - \Phi_2) \rangle$

Avec $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, on obtient :

$$\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle = \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10} \cdot E_{20} \cdot \langle [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\Phi_1 + \Phi_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\Phi_2 - \Phi_1))] \rangle$$

b) $I_1 = K \langle E_1^2 \rangle_t = K \frac{E_{10}^2}{2}$ et $I_2 = K \langle E_2^2 \rangle_t = K \frac{E_{20}^2}{2}$

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \langle [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\Phi_1 + \Phi_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\Phi_2 - \Phi_1))] \rangle$$

c) Si $\omega_1 \neq \omega_2$, alors $\langle [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\Phi_1 + \Phi_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\Phi_2 - \Phi_1))] \rangle = 0$

et $I = I_1 + I_2$: les deux ondes n'interfèrent pas.

2 – a) Si $\omega_1 = \omega_2$, alors

$$\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle = \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10} \cdot E_{20} \cdot [\cos(\Phi_2 - \Phi_1)] = \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10} \cdot E_{20} \cdot \cos\Phi \quad \text{et aussi}$$

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\Phi : \text{les deux ondes interfèrent.}$$

$$\text{b) frange brillante : } \Phi = 2q\pi, q \text{ entier relatif} \Rightarrow I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}$$

$$\text{frange sombre : } \Phi = (2q+1)\pi, q \text{ entier relatif} \Rightarrow I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}$$

3 – a) $\delta = S_1M - S_2M$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S_1M} & \left| \begin{array}{c} x + \frac{L}{2} \\ y \\ D \end{array} \right. & \overrightarrow{S_2M} \left| \begin{array}{c} x - \frac{L}{2} \\ y \\ D \end{array} \right. \\ \text{avec} & & \text{et} \end{array}$$

$$\delta = \sqrt{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

$$\text{b) } \delta = D\sqrt{1 + \frac{y^2 + \left(x + \frac{L}{2}\right)^2}{D^2}} - D\sqrt{1 + \frac{y^2 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{D^2}}$$

$$\delta = D\left(1 + \frac{y^2 + \left(x + \frac{L}{2}\right)^2}{2D^2}\right) - D\left(1 + \frac{y^2 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2D^2}\right) \quad \text{soit}$$

$$\delta = \frac{y^2 + \left(x + \frac{L}{2}\right)^2}{2D} - \frac{y^2 + \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2D} \quad \text{ou encore} \quad \delta = \frac{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2D} = \frac{2Lx}{2D}$$

$$\delta = \frac{Lx}{D}$$

4 – Une frange est définie par $\Phi = \text{cte}$, soit $x = \text{cte}$: ce sont donc des droites parallèles à l'axe O'y.

5 – L'interfrange i est la distance entre deux franges de même nature :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{D}{L} (\delta_{p+1} - \delta_p) = \frac{D}{L} ((p+1)\lambda - p\lambda) \quad i = \frac{\lambda D}{L}$$

$$\text{6 – a) } (AS, AS'_1) = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\text{par symétrie orthogonale})$$

$$\text{Donc } (M_2, AS'_1) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{Or } (M_2, AS) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (AS, AS_2) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \pi - 2\alpha$$

$$\text{De même pour } (AS, AS_1) = \pi - 2\alpha \quad \text{On en déduit } (AS_1, AS_2) = 4\alpha$$

$$\text{b) } \alpha \ll \frac{\pi}{2} \text{ et } AS_2 = AS = R \Rightarrow S_1 S_2 = 4R\alpha \text{ d'où } i = \frac{\lambda(R+d)}{4R\alpha}$$

$$\text{c) } \tan 2\alpha = \frac{OE_1}{d} \approx 2\alpha \Rightarrow OE_1 = 2d\alpha \text{ et } E_1 E_2 = 4d\alpha$$

$$N = 2 \times E \left(\frac{OE_1}{i} \right) + 1 \quad (\text{le 1 représente la frange centrale}) \text{ où la fonction } E(x) \text{ représente la partie entière de } x.$$

d) Applications numériques : on trouve $i = 0,6 \text{ mm}$, $[E_1 E_2] = 5,6 \text{ mm}$ et $N = 2 \times 9 + 1 = 19$ franges brillantes.

QUATRIEME PROBLEME ELECTROMAGNETISME

1 – Sur le schéma de la figure 7, le champ magnétique incident $\vec{B}_i$ est vers nous, de même que le champ magnétique transmis $\vec{B}_t$. Par contre, le champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$ est orienté vers le fond.

$$2 - \text{Maxwell - Faraday : } \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ donne en complexes } j\vec{k} \wedge \vec{E} = j\omega \vec{B} \text{ soit } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k_0 n_1}{\omega} E_0 e^{-j(\omega t - k_i x)} \vec{e}_z \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{k_0 n_1 r}{\omega} E_0 e^{-j(\omega t - k_r x)} \vec{e}_z \\ \vec{B}_t &= \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{k_0 n_2 t}{\omega} E_0 e^{-j(\omega t - k_t x)} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$3 - \begin{cases} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t \end{cases} \text{ en } x = 0$$

4 – La première relation donne $1 + r = t$, la deuxième conduit à $n_1(1-r) = n_2 t$

$$\text{d'où } r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$5 - \text{a) } r = r' \Rightarrow 1 - n = n - N, \text{ soit } n = \frac{N+1}{2}$$

b) Les vibrations sont en opposition de phase si entre la différence de phase entre les deux

est $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \pi$ (normalement $(2q+1)\pi$ mais on prend $q = 0$ à la question c))

On a donc $\delta = \frac{\lambda}{2}$.

c) Avec $\delta = 2 n e$ (cela aurait pu être demandé ! !), on obtient $e = \frac{\lambda}{4n}$.

d) Applications numériques : on trouve $n = 1,4$ et $e = 100 \text{ nm} = 0,1 \mu\text{m}$.