

XI класс

1. Ответ: да.

Решение. Разложим заданное число на множители. Тогда, получим $13^{13} + 13^{14} + 13^{15} = 13^{13}(1 + 13 + 169) = 13^{13} \cdot 183 = 13^{13} \cdot 3 \cdot 61$ – делится на 61.

2. Ответ: (7, 1, 4), (13, 11, 16).

Решение. Умножим первое уравнение системы на 5, а второе – на (-3) и найдем их сумму:

$$a^2 - b^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 48 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2^4 \cdot 3.$$

Заметим, что числа $a + b$ и $a - b$ одинаковой четности, и так как их произведение четно, то оба эти числа четны, причем $0 < a - b < a + b$. Поэтому возможны лишь три случая:

$$1) \begin{cases} a + b = 24, \\ a - b = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13, \\ b = 11. \end{cases} \quad \text{и тогда из исходной системы находим } c = 16.$$

$$2) \begin{cases} a + b = 12, \\ a - b = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8, \\ b = 4. \end{cases} \quad \text{но в этом случае не существует натуральных значений } c, \text{ удовлетворяющих вместе с } a = 8 \text{ и } b = 4 \text{ исходной системе.}$$

$$3) \begin{cases} a + b = 8, \\ a - b = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7, \\ b = 1. \end{cases} \quad \text{и тогда из исходной системы находим } c = 4.$$

3. Ответ: 36° .

Решение. Так как боковые грани ADC и BDC – равные равнобедренные треугольники, то их биссектрисы AN и BN равны. Таким образом, треугольник ANB – равнобедренный с углом 60° при вершине и, следовательно, $\triangle ANB$ – равносторонний. Поэтому $AN = AB = AC$.

Рассмотрим грань ADC . В ней $AD = DC$ и $AN = AC$. Обозначим $\angle ACD = 2x$. Так как треугольники ANC и ACD равнобедренные, то $\angle ANC = \angle ACN = 2x$ и $\angle DAC = \angle ACD = \angle ACN = 2x$. Так как AN – биссектриса угла DAC , то $\angle DAN = \angle NAC = 0,5\angle DAC = x$. В таком случае и $\angle ADN = \angle ANC - \angle DAN = 2x - x = x$. Подсчитывая сумму углов треугольника ADC , находим, что $5x = 180^\circ$, откуда $\angle ADC = x = 36^\circ$.

4. Ответ: 498 долларов.

Решение. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500 - 300 = 200$, $200 + 198 = 398$, $398 - 300 = 98$, $98 + 198 = 296$, $296 + 198 = 494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

5. Ответ: а) можно; б) можно.

Решение. а) Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Пусть O – центр вписанной в него окружности, а A_1 , B_1 , C_1 точки ее касания со сторонами BC , AC , AB соответственно.

Рассмотрим четырехугольник AC_1OB_1 . Его стороны OC_1 и OB_1 равны как радиусы вписанной окружности, а стороны AC_1 и AB_1 равны как касательные к вписанной окружности, проведенные из точки A . Поэтому $AB_1 + OC_1 = AC_1 + OB_1$, т.е. суммы длин противоположных сторон четырехугольника AC_1OB_1 , равны. Следовательно, этот четырехугольник описанный. Аналогично доказывается, что и два других четырехугольника BA_1OC_1 и CA_1OB_1 являются описанными.

б) Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Пусть S – вписанная окружность этого треугольника. Проведем любую прямую, касающуюся окружности S и пересекающую две стороны треугольника (например, касательную, параллельную стороне AB).

Пусть M и N – точки пересечения проведенной прямой со сторонами AC и BC . Очевидно, что четырехугольник $AMNB$ описанный. Теперь достаточно разбить треугольник MCN (как это было описано в предыдущем пункте, еще на три описанных четырехугольника.

Х класс

1. Ответ: 4 и 21.

Решение. $\frac{13m-1}{3m+5} = \frac{12m+20+m-21}{3m+5} = \frac{4(3m+5)+m-21}{3m+5} = 4 + \frac{m-21}{3m+5}$ —

целое число, если $\frac{m-21}{3m+5}$ — целое, т.е. $(m-21) \mid (3m+5)$.

При $m=1$ $3m+5=8$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ не выполняется.

При $m=2$ $3m+5=11$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ не выполняется.

При $m=3$ $3m+5=14$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ не выполняется.

При $m=4$ $3m+5=17$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ выполняется.

При $m=5$ $3m+5=20$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ не выполняется. И т.д.

При $m=21$ $3m+5=68$, значит $(m-21) \nmid (3m+5)$ выполняется.

2. Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Решение. Обозначив $|x^2+x|=t$, где $t>0$, получим $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=1$, ($t_2=-2$ — не подходит). Далее, решая $|x^2+x|=1$, получим уравнения $x^2+x-1=0$ и $x^2+x+1=0$ (не имеет действительных корней),

находим из первого уравнения $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. Ответ: $AB=4\text{см}$, $BC=6\text{см}$.

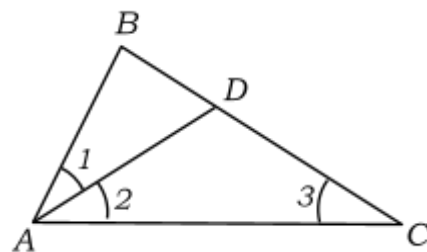
Решение. Проведем биссектрису AD . Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. В $\triangle ADC$ $AD=DC$. Пусть $AB=x$, $AD=DC=y$, тогда $BC=x+2$, $BD=x+2-y$. Заметим, что $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$).

Из подобия имеем: $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$,

или $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$.

Для нахождения x и y получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy. \end{cases}$$



Вычитая из первого уравнения второе, получим $5y - 10 = 2y$, откуда $y = \frac{10}{3}$,
тогда $x = 4$. значит $AB = 4\text{см}$, $BC = 6\text{см}$.

II способ. Указание: применить теорему синусов.

4. 4. Ответ: 16.

Решение. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2n = 65535$ – это сумма геометрической прогрессии, где $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, и т.д. Таким образом, $q = 2$. Формула суммы

геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

$$65535 = \frac{(2^n - 1)}{2 - 1}; \quad 2^n - 1 = 65535; \quad 2^n = 65536; \quad 2^n = 2^{16}; \quad n = 16.$$

5. Решение: Если хотя бы 1 грань четырёхугольник, то ребер не меньше 8. Будем искать многогранник с треугольными гранями. Пусть граней n , тогда ребер $\frac{3n}{2}$. $\frac{3n}{2} = 7$, тогда $n = 4 \frac{2}{3}$ не является натуральным числом. Значит, многогранника с 7 ребрами не существует.

IX класс

1. Решение.

$$n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + 3n^2 + 6n - n + 3 = n(n^2 - 1) + 3(n^2 + 2n + 1) =$$
$$= n(n+1)(n-1) + 3(n+1)(n+1) = (n-1)n(n+1) + 3(n+1)^2, \text{ т.к. первое слагаемое --}$$

это произведение трех последовательных натуральных чисел, т.е. оно кратно 3, а второе слагаемое содержит множитель 3, значит и вся сумма кратна 3.

2. Ответ. 3) $y = -3x + 12$; 4) $y = -x - 12$.

Решение.

Из четырёх прямых только прямая *a* имеет положительный угловой коэффициент, следовательно, она задаётся уравнением 2 и пересекает оси координат в точках (0; 12) и (-12; 0).

Так как уравнение 1 Дима записал полностью, его графиком является прямая, проходящая через начало координат, то есть прямая *c*.

У прямой *b* модуль углового коэффициента больше, чем у прямой *c*, значит, начало уравнения прямой *b* Дима записал под номером 3. Так как эта прямая проходит через точку (0;12), она задаётся уравнением $y = -3x + 12$.

Прямая *d* проходит через точку (-12;0) и через точку (12; -24) – точку пересечения прямых *b* и *c*, координаты которой легко находятся как решение системы линейных уравнений: $y = -3x + 12$ и $y = -2x$.

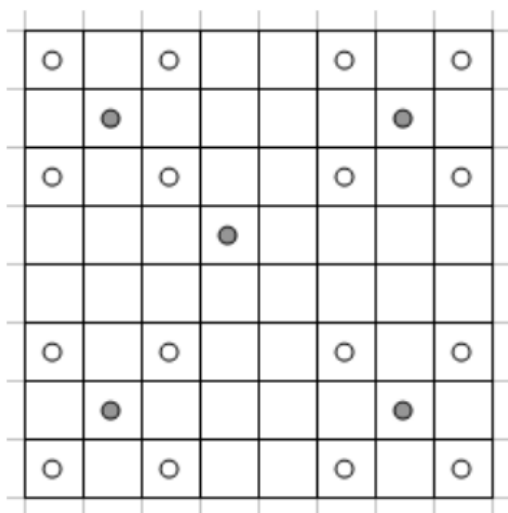
Найдём уравнение прямой *d*. Для этого рассмотрим систему двух уравнений: $0 = -12k_4 + b_4$ и $-24 = 12k_4 + b_4$. Сложив эти уравнения, получим $b_4 = -12$.

Подставив в первое уравнение, получим $k_4 = -1$.

3. Ответ. 16.

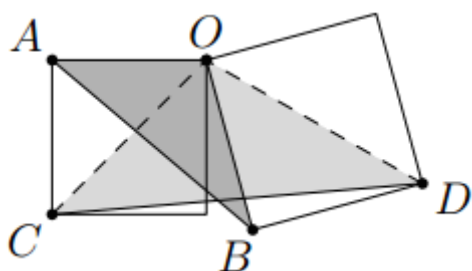
Решение.

Заметим, что каждый король, снятый с доски, мог бить не более 4 из оставшихся (иначе и некоторые из оставшихся били бы друг друга). Поэтому число оставшихся королей не может превосходить число снятых более чем в 4 раза, то есть не может быть больше 16. Пример приведён на рисунке: серым обозначены короли, которых необходимо убрать.



3. Ответ: $1 : \sqrt{2}$.

Решение. Пусть точка O — общая вершина двух квадратов, а их стороны равны a и b . Диагонали квадратов равны $\sqrt{2}a$ и $\sqrt{2}b$ соответственно. Кроме того, $\angle COD = \angle COB + \angle BOD = \angle COB + 45^\circ = \angle COB + \angle AOC = \angle AOB$. Треугольники AOB и COD подобны по общему углу и пропорциональным сторонам при этом угле. Следовательно, $AB:CD = 1 : \sqrt{2}$.

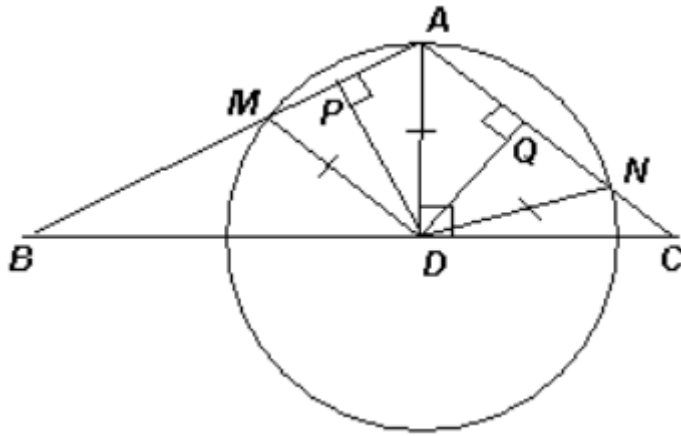


4. Ответ: мс/н.

Решение.

Докажем, что $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Это можно сделать по-разному.

Один из способов. В прямоугольных треугольниках ADB и ADC проведём высоты DP и DQ соответственно (см. рис.). Тогда $AP \cdot AB = AD^2 = AQ \cdot AC$. Так как треугольники ADM и ADN — равнобедренные, то $AP = 12AM$ и $AQ = 12AN$.



Заменяя AP и AQ в равенстве $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$, получим требуемое.

VIII класс

1. Ответ: 28 и 34.

Решение.

Решая эту задачу, следует рассуждать с конца.

Шаг в игре	Первый пират	Второй пират
Конец игры	19	43
3	19	43
2	38	24
1	14	48
Начало игры	28	34

2. Ответ: $\angle NMK = 80^\circ$, $\angle MKN = 60^\circ$, $\angle MNK = 40^\circ$.

Решение.

1) В треугольнике NME : $\angle NME = x$, $\angle MNE = 180^\circ - 2x$.

2) В треугольнике FMK : $\angle K = 180^\circ - x - \frac{x}{2} = 180^\circ - 1,5x$.

3) В треугольнике MNK : $180^\circ - 1,5x + x + 360^\circ - 4x = 180^\circ$

$$x = 80^\circ$$

3. Ответ: $\sqrt{2003} + \sqrt{2001} < 2\sqrt{2002}$.

Решение.

Пусть $A = \sqrt{\kappa+1} + \sqrt{\kappa-1}$, $B = 2\sqrt{\kappa}$ (где $\kappa = 2002$).

Тогда $A^2 - B^2 = 2\kappa + 2\sqrt{\kappa^2 - 1} - 4\kappa = 2(\sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa) < 0$.

Поэтому $A < B$.

4. Ответ: $\frac{5}{126}$.

Решение. Обозначим горизонтальные стороны прямоугольников через $a_1, a_2, \dots, a_5$, а вертикальные - $b_1, b_2, \dots, b_5$. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Применяя это к «диагональным» прямоугольникам, получим $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_5 b_5$. Применяя эту же формулу к «поддиагональным» прямоугольникам, получим $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$

$a_2 b_1 \cdot a_3 b_2 \cdot a_4 b_3 \cdot a_5 b_4$. Разделив первое равенство на второе, получим $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = a_1 b_5$. Это и есть искомая площадь и она равна $\frac{5}{126}$.

5. Ответ: 259.

Решение. Пусть x^1, x^2, x^3, x^4 - это цифры 1,9,9,6, расставленные в некотором порядке. Тогда сумма, о которой идет речь в условии задачи, содержит $(x^2 + x^3 + x^4)$ единиц и $(x^1 + x^2 + x^3)$ десятков. Следовательно, сумма равна $10 \cdot (x^1 + x^2 + x^3) + (x^2 + x^3 + x^4) = 10 \cdot x^1 + 11 \cdot (x^2 + x^3) + x^4$. Наибольшей она будет тогда, когда $x^2 = x^3 = 9, x^1 = 6, x^4 = 1$, т.е. порядок цифр должен быть таким : 6,9,9,1, а сумма равна 259.