Тема: Дробово-раціональні рівняння

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf

Матеріали до теми:

Дробове раціональне рівняння це рівняння, у якого ліва або права частина і обидві — дробові вирази. Для його розв'язання доцільно виконати такі дії:

1) перенести всі доданки в один бік;

2) звести їх до спільного знаменника;

3)до одержаного рівняння виду $\frac{a}{b}=0$ (де a і b — деякі цілі вирази) застосувати умову рівності дробу нулю;

4) знайти корені чисельника;

5) перевірити, чи не дорівнює знаменник нулю при цих значеннях невідомого;

6) записати відповідь.

Приклад

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x},$$

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0,$$

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x(x-2)(x+2)\neq 0. \end{cases}$$

Дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля:

$x^2-5x+6=0;\quad D=25-24=1;\quad x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}.$

$x_1=2,\ x_2=3.$

Якщо $x=2$, то $2(2-2)(2+2)=0$.

Якщо $x=3$,то $3(3-2)(3+2)\neq0$.

Відповідь: $x=3$.

Приклад

Розв'язати дробово-раціональне рівняння $\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання. $\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9}$, ОДЗ: $x\neq\pm3$

$$\frac{(3x-2)(x+3)-(x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{15x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$3x^2+9x-2x-6-\left(x^2-3x-4x+12\right)-15x-3=0$$

$3x^2+7x-6-x^2+3x+4x-12-15x-3=0$, $2x^2-x-15=0$

$$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-15)=1+120=121$$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{1+\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{1+11}{4}=3$ *– сторонній корінь, тому що не задовольняє вимогам ОДЗ.* $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{1-\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{1-11}{4}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$

Відповідь. $\left\{-2\frac{1}{2}\right\}$.

Приклад

Розв'язати дробово-раціональне рівняння $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{5x}{x+1}+6=0$.

Розв'язання. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{5x}{x+1}+6=0$, ОДЗ: $x\neq -1$, $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\cdot\frac{x}{x+1}+6=0$.

Введемо заміну: $\frac{x}{x+1}=t$, $t^2-5t+6=0$. За теоремою Вієта

$$\begin{cases}t_1+t_2=-5\\t_1t_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=2\\t_2=3\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{x+1}=2\\\frac{x}{x+1}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{x+1}-2=0\\\frac{x}{x+1}-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-2(x+1)}{x+1}=0\\\frac{x-3(x+1)}{x+1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2(x+1)=0\\x-3(x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2x-2=0\\x-3x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x-2=0\\-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0\\2x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\2x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2\\x_2=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2\\x_2=-1\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left\{-2;-1\frac{1}{2}\right\}$.

До дробових раціональних рівнянь приводить велика кількість задач на рух та спільну роботу.

Приклади

Задача 1 (на рух). Теплохід пройшов течією річки 150 км і повернувся назад, витративши на весь шлях 5,5 години. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді 55 км/год.

Розв'язання

Рух	Швидкість (км/год)	Час (год)	Відстань (км)
За течією	(55+x)	$\frac{150}{55+x}$	
Проти течії	(55–x)	$\frac{150}{55-x}$	

Нехай швидкість течії річки x км/год. Тоді за течією теплохід рухався зі швидкістю $(55 + x)$ км/год і пройшов 150 км за $\frac{150}{55+x}$ год. Проти течії теплохід

рухався зі швидкістю (55–x) км/год і пройшов *150* км за $\frac{150}{55-x}$ год. За умовою задачі, на весь шлях він витратив *5,5* год.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$\frac{150}{55+x}+\frac{150}{55-x}=\frac{11}{2},$$

$$\frac{2\cdot 150\cdot(55-x)+2\cdot 150\cdot(55+x)}{2\cdot(55+x)(55-x)}-\frac{11(55^2-x^2)}{2\cdot(55+x)(55-x)}=0,$$

$$\frac{300\cdot 55-300x+300\cdot 55+300x}{2\cdot(55+x)(55-x)}-\frac{11\cdot 3025-11x^2}{2(55+x)(55-x)}=0,$$

$$\frac{-257+11x^2}{2\cdot(55+x)(55-x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}11x^2-275=0,\\2(55+x)(55-x)\neq 0;\end{cases}$$

$$11x^2-275=0,$$

$$x^2=25,$$

$$x_1=5;\ x_2=-5.$$

Розв'язок -*5* не задовольняє умову задачі: швидкість — число додатне.

Відповідь: швидкість течії *5* км/год.

Задача 2 (на сумісну роботу). Дві бригади, працюючи разом, виконали певне завдання за *4* дні. Скільки днів потрібно на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо першій бригаді для цього потрібно на 6 днів менше, ніж другій?

Розв'язання.

Нехай перша бригада може виконати це завдання за x днів. Тоді другій потрібно $(x+6)$ днів. Це означає, що за один день перша бригада виконає $\frac{1}{x}$, а друга — $\frac{1}{x+6}$ частину всього завдання. За умовою задачі, разом вони можуть виконати все завдання за 4 дні, тобто в день дві бригади, працюючи разом, виконують $\frac{1}{4}$ всього завдання.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4},\quad\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0,$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-24=0;\\4x(x+6)\neq 0;\end{cases}$$

$$x^2-2x-24=0.$$

За теоремою Вієта: $x_1=6$, $x_2=-4$. Корінь $x = -4$ не задовольняє умову задачі, тому що час — число додатне.

$4 \cdot 6 \cdot (6+6) \neq 0;\ 6+6=12.$

Відповідь: першій бригаді потрібно 6 днів, другій — 12 днів.

Завдання:

1. Повторити означення та способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь.

2. Виконати письмово вправи: 24.64-24.65.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .