

Тема: Дробово-раціональні рівняння

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Дробове раціональне рівняння це рівняння, у якого ліва або права частина і обидві — дробові вирази. Для його розв'язання доцільно виконати такі дії:

- 1) перенести всі доданки в один бік;
- 2) звести їх до спільного знаменника;

$$\frac{a}{b} = 0$$

3) до одержаного рівняння виду $\frac{a}{b}$ (де a і b — деякі цілі вирази) застосувати умову рівності дробу нулю;

- 4) знайти корені чисельника;
- 5) перевірити, чи не дорівнює знаменник нулю при цих значеннях невідомого;
- 6) записати відповідь.

Приклад

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} &= \frac{4-x}{x^2+2x} \\ \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} - \frac{4-x}{x(x+2)} &= 0, \\ \frac{2x - (x+2) - (4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} &= 0, \\ \frac{2x - x - 2 - 4x + x^2 + 8 - 2x}{x(x-2)(x+2)} &= 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x-2)(x+2)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x(x-2)(x+2) \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля:

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad D = 25 - 24 = 1; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Якщо $x = 2$, то $2(2 - 2)(2 + 2) = 0$.

Якщо $x = 3$, то $3(3 - 2)(3 + 2) \neq 0$.

Відповідь: $x = 3$.

Приклад

Розв'язати дробово-раціональне рівняння $\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання. $\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$, ОДЗ: $x \neq \pm 3$

$$\frac{(3x-2)(x+3) - (x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{15x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$3x^2 + 9x - 2x - 6 - (x^2 - 3x - 4x + 12) - 15x - 3 = 0$$

$$3x^2 + 7x - 6 - x^2 + 3x + 4x - 12 - 15x - 3 = 0, \quad 2x^2 - x - 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 11}{4} = 3 \quad - \text{сторонній корінь, тому що не задовольняє}$$

$$\text{вимогам ОДЗ. } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 11}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

Відповідь. $\left\{ -2\frac{1}{2} \right\}$.

Приклад

Розв'язати дробово-раціональне рівняння $\left(\frac{x}{x+1} \right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$.

Розв'язання. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$, ОДЗ: $x \neq -1$, $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{x+1} + 6 = 0$.

Введемо заміну: $\frac{x}{x+1} = t$, $t^2 - 5t + 6 = 0$. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 t_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{x}{x+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} - 2 = 0 \\ \frac{x}{x+1} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2(x+1)}{x+1} = 0 \\ \frac{x-3(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2(x+1) = 0 \\ x-3(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x-2 = 0 \\ x-3x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2 = 0 \\ -2x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ 2x+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1\frac{1}{2} \end{cases}$$

Відповідь. $\left\{-2; -1\frac{1}{2}\right\}$.

До дробових раціональних рівнянь приводить велика кількість задач на рух та спільну роботу.

Приклади

Задача 1 (на рух). Теплохід пройшов течією річки 150 км і повернувся назад, витративши на весь шлях 5,5 години. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді 55 км/год.

Розв'язання

| Рух | Швидкість (км/год) | Час (год) | Відстань (км) |
|-------------|--------------------|--------------------|---------------|
| За течією | $(55+x)$ | $\frac{150}{55+x}$ | |
| Проти течії | $(55-x)$ | $\frac{150}{55-x}$ | |

Нехай швидкість течії річки x км/год. Тоді за течією теплохід рухався зі швидкістю $(55+x)$ км/год і пройшов 150 км за $\frac{150}{55+x}$ год. Проти течії теплохід

рухався зі швидкістю $(55-x)$ км/год і пройшов 150 км за $55-x$ год. За умовою задачі, на весь шлях він витратив 5,5 год.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$\frac{150}{55+x} + \frac{150}{55-x} = \frac{11}{2},$$

$$\frac{2 \cdot 150 \cdot (55-x) + 2 \cdot 150 \cdot (55+x)}{2 \cdot (55+x)(55-x)} - \frac{11(55^2 - x^2)}{2 \cdot (55+x)(55-x)} = 0,$$

$$\frac{300 \cdot 55 - 300x + 300 \cdot 55 + 300x}{2 \cdot (55+x)(55-x)} - \frac{11 \cdot 3025 - 11x^2}{2(55+x)(55-x)} = 0,$$

$$\frac{-257 + 11x^2}{2 \cdot (55+x)(55-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 11x^2 - 275 = 0, \\ 2(55+x)(55-x) \neq 0; \end{cases}$$

$$11x^2 - 275 = 0,$$

$$x^2 = 25,$$

$$x_1 = 5; x_2 = -5.$$

Розв'язок -5 не задовольняє умову задачі: швидкість — число додатне.

Відповідь: швидкість течії 5 км/год.

Задача 2 (на сумісну роботу). Дві бригади, працюючи разом, виконали певне завдання за 4 дні. Скільки днів потрібно на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо першій бригаді для цього потрібно на 6 днів менше, ніж другій?

Розв'язання.

Нехай перша бригада може виконати це завдання за x днів. Тоді другій потрібно $(x$

$+ 6)$ днів. Це означає, що за один день перша бригада виконає $\frac{1}{x}$, а друга — $\frac{1}{x+6}$

частину всього завдання. За умовою задачі, разом вони можуть виконати все

завдання за 4 дні, тобто в день дві бригади, працюючи разом, виконують $\frac{1}{4}$ всього завдання.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}, \quad \frac{4(x+6) + 4x - 4(x+6)}{4x(x+6)} = 0,$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{4x(x+6)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0; \\ 4x(x+6) \neq 0; \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0.$$

За теоремою Вієта: $x_1=6$, $x_2=-4$. Корінь $x = -4$ не задовольняє умову задачі, тому що час — число додатне.

$$4 \cdot 6 \cdot (6+6) \neq 0; 6+6=12.$$

Відповідь: першій бригаді потрібно 6 днів, другій — 12 днів.

Завдання:

1. Повторити означення та способи розв'язування дробово-раціональних рівнянь.
2. Виконати письмово вправи: 24.64-24.65.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.