

7 класс, 2016 год

1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух? (Ответ обоснуйте).

2. Вася и Петя играют в следующую игру. Сперва на доске записано число 2014. Мальчики ходят по очереди, и на каждом ходу нужно от записанного в данный момент на доске числа вычесть любой (по выбору игрока, делающего ход) его натуральный делитель и результат записать на доску вместо записанного на ней числа (к числу делителей относятся также 1 и само число). Проигрывает тот из мальчиков, после хода которого на доске появится нуль. Первым начинает ходить Вася. Кто из ребят выиграет при правильной игре? (Ответ обоснуйте).

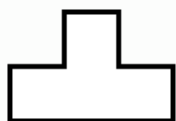
3. Программисты Вася, Петя и Федя за разработку программы получили гонорар и разделили его в отношении 4:5:7 (соответственно). Если бы они разделили гонорар в отношении 3:4:6 (соответственно), то один из них получил бы на полтора миллиона рублей больше, чем он получил на самом деле. Чему равна общая сумма гонорара?

4. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K и проведены биссектриса KE треугольника AKC и высота KH треугольника BKC . Оказалось, что угол EKH – прямой. Найдите BC , если $HC = 5$.

5. При каких значениях a и b выражение $p = 10a^2 + 2b^2 + 6ab + 6a - 18b + 2106$

$p = 10a^2 + 2b^2 + 6ab + 6a - 18b + 2106$ принимает наименьшее значение? Чему равно это значение?

6. Каю дали целый ящик с фигурками в виде "пьедестала" (см. рисунок).



а) Сможет ли он замостить ими шахматную доску 8×8 ?

б) А доску 10×10 ? (Ответ обоснуйте).

Решения 7 класс, 2016 год

1. **Решение:** $\overline{abc} \overline{abc}$ – задуманное число, $c = a + b$ $c = a + b$. На 0, 2, 4, 6 и 8 число не может оканчиваться – число будет делиться на 2. На 3 и 9 не может оканчиваться – по признаку делимости на 3 (9) число будет делиться на 3 (9) и соответственно будет составным. На 1 также не может оканчиваться – тогда первые два числа 1 и 0, а все числа должны быть различными. На 5 не может оканчиваться – по признаку делимости на 5 число будет составным. Остается число 7. Например, простым будет 167.

Ответ: 7.

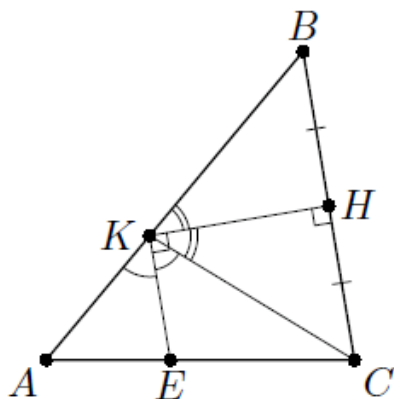
2. **Решение:** На первом ходу Вася вычитает из числа 2014 его делитель – число 1 и, значит, записывает на доску число 2013. После хода Пети в любом случае на доске будет записано чётное число (любой делитель нечётного числа нечётен, а значит, разность числа и делителя чётна). Тогда Вася вычитает из этого чётного числа 1 и снова записывает на доску нечётное число. Действуя так и далее – вычитая всё время 1, - Вася добивается того, что после каждого его хода на доске будет записано нечётное число, а значит, после каждого хода Пети на доске будет чётное число. Поскольку числа, записываемые на доску после хода каждого из игроков, уменьшаются, то рано или поздно после хода Васи на доске будет записана 1. Тогда Петя вынужден будет вычесть от неё 1, записать на доску 0 и, следовательно, проиграть.

Ответ: Выиграет Вася.

3. **Решение:** Обозначим величину гонорара за X . Тогда Вася, Петя и Федя получили соответственно $\frac{4}{16}X$, $\frac{5}{16}X$ и $\frac{7}{16}X$. Если бы они поделили гонорар вторым из указанных в условии способов, то получили бы соответственно $\frac{3}{13}X$, $\frac{4}{13}X$ и $\frac{6}{13}X$. Поскольку $\frac{4}{16}X > \frac{3}{13}X$, $\frac{5}{16}X > \frac{4}{13}X$, а $\frac{7}{16}X < \frac{6}{13}X$, то при втором способе деления гонорара именно Федя получил бы больше, причем на $\frac{6}{13}X - \frac{7}{16}X = \frac{5}{208}X$. По условию, $\frac{5}{208}X = 15 \cdot 10^5$, откуда $X = 208 \cdot 15 \cdot 10^5 : 5 = 624 \cdot 10^5 = 62400000$ рублей.

Ответ: 62 миллиона 400 тысяч рублей.

4. **Решение:** Так как углы AKC и BKC – смежные, то их биссектрисы перпендикулярны. Следовательно, биссектриса угла BKC совпадает с KH .



Таким образом, в треугольнике BKC отрезок KH – высота и биссектриса. Значит, он равнобедренный, а KH – его медиана, проведенная к основанию. Следовательно, $BC = 2HC = 10$.

Ответ: 10.

5. **Решение:**

$$p = 10a^2 + 2b^2 + 6ab + 6a - 18b + 2106 = (3a + b)^2 + (a + 3)^2 + (b - 9)^2 + 2016$$

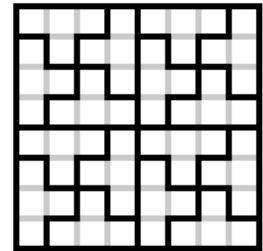
$$p = 10a^2 + 2b^2 + 6ab + 6a - 18b + 2106 = (3a + b)^2 + (a + 3)^2 + (b - 9)^2 + 2016$$

– выражение будет наименьшим при $a = -3$, $b = 9$, и наименьшее значение равно $p=2016$.

Ответ: $a = -3$, $b = 9$; $p=2016$.

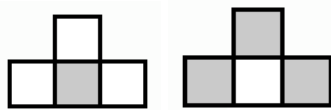
6. **Решение:**

а) Замостить доску 8×8 Кай сможет, например, как на рисунке:



б) А замостить доску 10×10 у него не получится.

Раскрасим эту доску в шахматном порядке. Тогда в каждом пьедестале закраситься одна или три клетки. Всего фигурок для замощения требуется $100 / 4 = 25$. Значит, на доске должно быть закрашено 25 раз по одной или по три клетки, то есть нечетное число. Но их закрашено ровно половина из 100 — это 50 клеток — четное число. Противоречие.



Ответ: а) Сможет; б) Не сможет.

