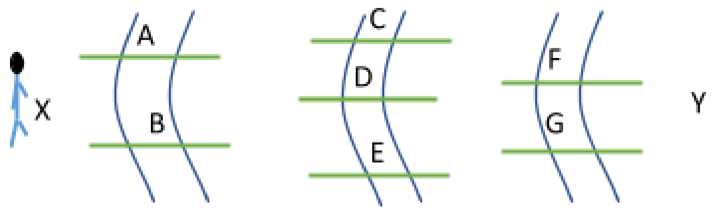
Pr. LATRACH Abdelkbir	DÉNOMBREMENT	Nom : ------------------------------

I. Principe général du dénombrement :

1. Définition :

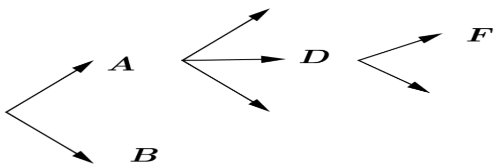
✍ **Activité ①:**

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :



L'écriture ADF signifie que cette personne est passée par le pont A, le pont D puis le pont F.

1) Compléter l'arbre suivant, puis déduiser l'ensemble des chemins menant au point Y.



2) Calculer le nombre de chemins que cette personne pourrait emprunter pour atteindre le point Y.

: Solution

Définition :

Soit p choix.
Si le premier choix se fait de n_1 manière différente et le second choix se fait de n_2 manière différente … et le $p^{ième}$ choix se fait de n_p manière différente, alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est :

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$$

Exemple ① :

On considère les chiffres suivants : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 *et* 8.
On veut former un code de 3 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents.

- ✔ Choix du premier chiffre : -------------------------
- ✔ Choix du second chiffre : -------------------------
- ✔ Choix du troisième chiffre : -------------------------

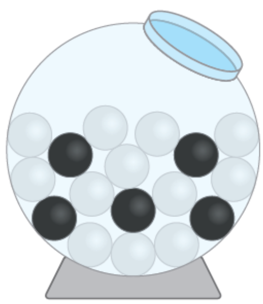
Donc d'après le principe général de dénombrement le nombre de codes possibles est : ------------------------------

Exemple ② :

Une personne possède trois chemises, deux cravates et trois pantalons.
Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter. (Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

✍ **Exercice ①:**

Une urne contient cinq boules noires et 12 boules blanches. On tire successivement et sans remise (sans remettre la boule après l'avoir tirée dans l'urne) deux boules de l'urne.



1) Construire l'arbre des choix.
2) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différentes ?
4) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et avec remise.

2. *Arrangement-Permutation*

Activité :

On veut ranger, cinq objets notés $1,\ 2,\ 3,\ 4\ et\ 5$ dans trois tiroirs notés A , $B\ et\ C$.

1) Combien de rangements différents peut-on réaliser ?
2) Combien de rangements où l'objet 1 est placé dans le tiroir A ?
3) Combien de rangements sont effectués dans deux tiroirs ?
4) Combien de rangements différents peut-on réaliser si on dispose de 5 tiroirs $A,\ B,\ C,\ D\ et\ E$?

: Solution

Propriété :

Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.
On note le nombre des arrangements de p éléments parmi n par : A_n^p .
Et on a : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Remarques :

- Par convention : $A_n^0 = 1$.
- L'ordre est important dans tout arrangement.

Exemples :

✔ $A_5^3 =$

✔ $A_9^4 =$

✔ $A_7^1 =$

✔ $A_6^6 =$

Application ①:

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres $1, 3,\ 5,\ 7\ et\ 9$ tous distincts ?

: Solution

Application ②:

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres $A,\ B,\ C,\ D,\ E\ et\ F$.
Déterminer le nombre de mots possibles.

: Solution

Application ③:

Un parking comporte sept places libres repérées par les numéros 1 à 7.

De combien de façons peut-on garer :

1) Une voiture ?
2) Trois voitures ?
3) Sept voitures ?

: Solution

Définition et propriété :

Soit n un entier naturel.

Tout arrangement de n éléments parmi n éléments est appelé une **permutation.**

On note le nombre de permutations de n par : $n!$.

Et on a : $n! = A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1.$

Remarques :

- Par convention : $0! = 1$.
- $n!$ se lit 'factorielle n'

Exemples :

✔ $3! =$ --

✔ $\frac{5!}{2!} =$ --

Application ①:

Trois amis se photographient en changeant de places (un au milieu, un à sa droite et l'autre à sa gauche).

De combien de façons différentes peuvent ils se placer pour la photo ?

: Solution

Application ②:

Comparer A_7^5 et $\frac{7!}{(7-5)!}$.

: Solution

Propriété :

Pour tout entier n et tout entier p tel que : $1\leq p\leq n$ On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

3. *Combinaison*

Activité :

Un groupe se compose de quatre personnes :

$E = \{a\,; b; c; d\}$.

Nous voulons former un comité de trois personnes pour effectuer une tâche.

1) Déterminer les comités qu'on peut former.
2) Calculer $\frac{A_4^3}{3!}$. Conclure.

: Solution

Définition et propriété :

Soient $n\in N$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1\leq p\leq n$

On appelle **combinaison** de p éléments parmi n éléments de E toute partie de E possédant p éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$.

Remarque :

- $C_n^0 = 1$.
- C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

Exemples :

✔ $C_3^2 =$ --

✔ $C_5^2 =$ --

✔ $C_7^7 =$ ---

✍ ***Application :***

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

1) Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.
2) Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
3) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
4) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
5) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

: Solution

----

4. Type de tirage :

On tire p éléments parmi n.

Type de Tirage	*Nombre de tirages possible*	*L'ordre*
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

✍ ***Exercice ②:***

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire <u>simultanément</u> au hasard 2 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différents ?
4) Quel est le nombre de tirages comportant <u>au moins</u> une boule blanche ?

✍ ***Exercice ③:***

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) Construire l'arbre du choix.
3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
4) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différents ?
5) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et avec remise.

II. Principe de la somme :

✍ ***Activité :***

On considère les ensembles suivants :

$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ et $B = \{3, 4, 5, 7, 12\}$.

1) Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

On note le nombre d'éléments d'un ensemble E par $card(E)$ et se lit « cardinal de E ».

2) Déterminer $card(A)$, $card(B)$, $card(A \cap B)$ et $card(A \cup B)$.
3) Comparer $card(A \cup B)$ et $card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

: Solution

Propriété :

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E.
$card(\emptyset) = 0$.
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

Remarque :

Si $A \cap B = \emptyset$, alors :
$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

Application :

Dans une faculté, il y a 1000 étudiants, dont 400 étudient l'anglais et 750 étudient l'espagnol.
Déterminer le nombre d'étudiants qui étudient l'anglais et l'espagnol.

: Solution
