Дисциплина: ОД.07 Математика

Занятие № 58 **Группа БУ и ТД 1/1-9/25** **Дата: 26.01.2026**

Тип занятия: практическое занятие 29 **Преподаватель: Бережная В.А.**

Тема занятия: Периодические функции. Тригонометрические функции

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

– актуализировать знания о четной, нечетной, периодической функции для тригонометрических функций;

– познакомиться с задачами на построение и анализ тригонометрических функций.

План занятия:

1. Свойства и графики функций *y = cos x, y = sin x*.
2. Свойства и графики функций *y = tg x, y = ctg x*.

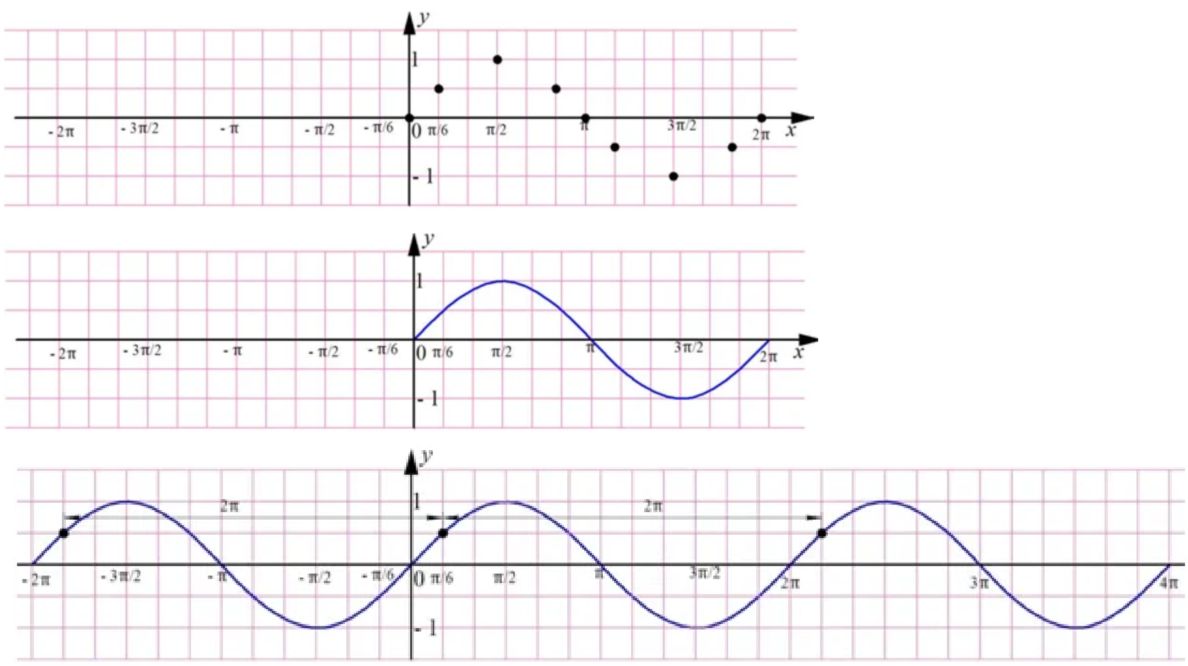
1. Свойства и графики функций *y = cos x, y = sin x*.

y = sin x

Изучение графиков тригонометрических функций начнем с синуса. В тригонометрии при построении графика синуса принято по оси Ох откладывать значение угла в радианах, а не в градусах. Из-за этого в школьной тетради тяжело точно отметить точки, через которые проходит этот график.

Поэтому в учебных целях график строят приближенно (естественно, что на практике точный график можно построить с помощью компьютера с любой требуемой точностью). Считают, что величина π/2 примерно равна 1,5, то есть дроби 3/2. Если выбрать масштаб, при котором единице равны 2 клеточки, то π/2 – это 3 клеточки. Тогда π/6 – это одна клеточка, а π/3 – две.

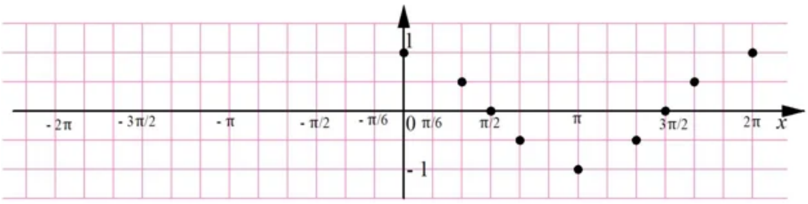
Углам, отличающимся на 2π (на один полный оборот), на единичной окружности соответствует одинаковая точка.

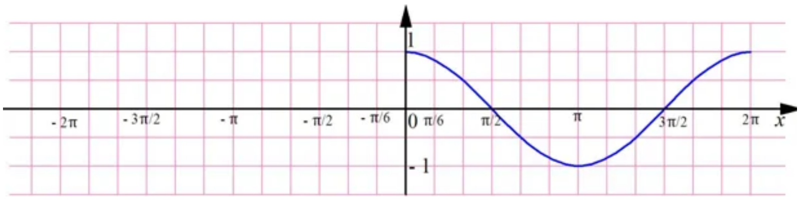


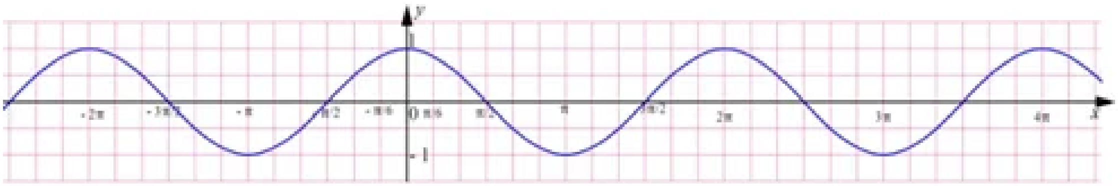
В результате мы получили кривую, которую называют синусоидой.

y = cos x

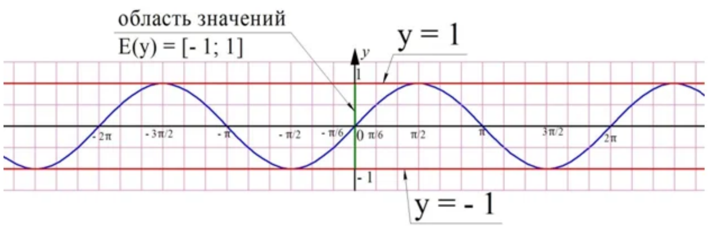
Теперь построим график косинуса. Мы знаем что cos 0 = 1 cos π/3 = 1/2 cos π/2 = 1 Получается, что график должен проходить через точки (0;1), (π/3; 1/2) и (π/2; 0). Можно вычислить, используя симметрию на единичной окружности, ещё несколько точек, которые должны лежать на графике. Не приводя этих вычислений, просто отметим эти точки на плоскости:



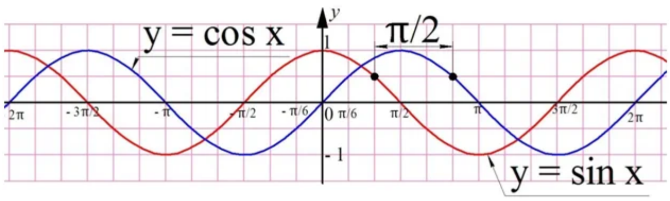




Можно заметить несколько **особенностей** полученных графиков. Во-первых, все точки обоих графиков лежат в «полосе» между прямыми y = 1 и y = – 1. Это следствие того, что и у синуса, и у косинуса область значений – это промежуток [– 1; 1]:



Во-вторых, график косинуса очень похож на синусоиду. Он имеет такую же форму, но просто смещен на π/2 (3 клеточки) влево. Это не случайно, в будущих уроках мы узнаем причину этого явления. Но, так как график косинуса – это просто смещенная синусоида, то термин «косинусоида» для его обозначения почти не используется – он просто избыточен.



В-третьих, графики обладают периодичностью. Они «повторяются» с периодом 2π. Дело в том, что углам, отличающимся друг от друга на 2π (то есть ровно на один полный поворот в 360°), на единичной окружности соответствует одна и та же точка. То есть справедливы формулы:

sin (x+ 2π) = sinx   cos (x+ 2π) = sinx

В-четвертых, можно заметить, что график косинуса симметричен относительно оси Ox, а график синуса симметричен относительно начала координат. Это значит, что синус является нечетной функцией, а косинус – четной функцией.

Напомним, что ф-ция f(x) является нечетной, если справедливо условие

f(x) = – f(– x)

Если f(x) – четная ф-ция, то должно выполняться условие:

f(x) = f(– x)

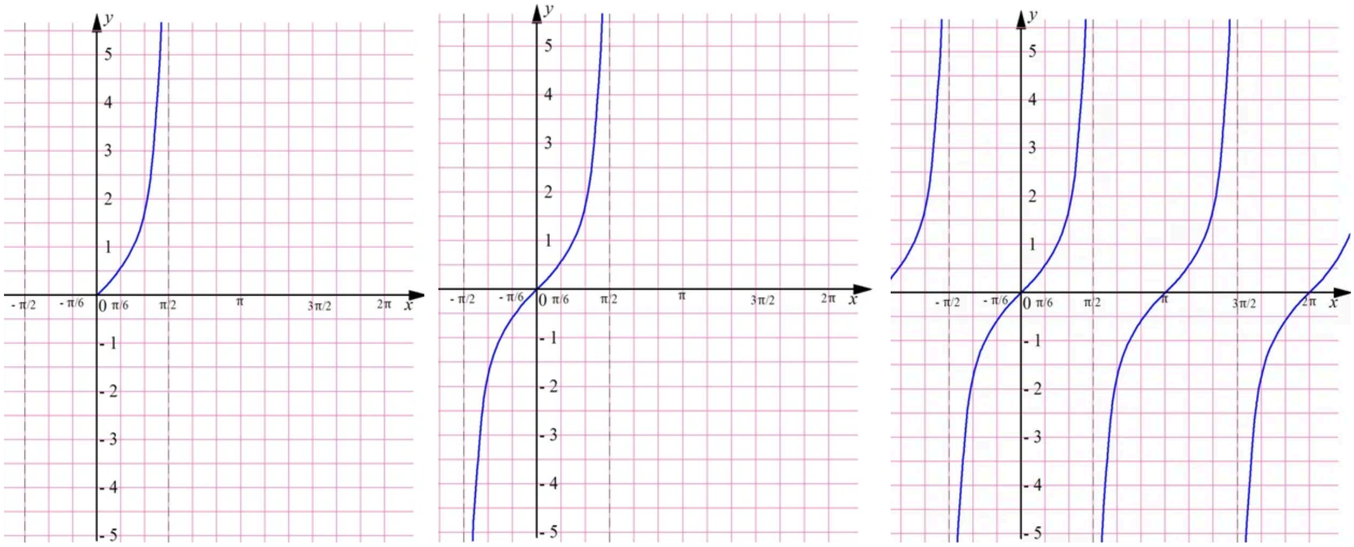
Действительно, если отложить на единичной окружности углы α и (– α), то можно заметить, что их косинусы будут равны друг другу, и синусы окажутся противоположными.

2. Свойства и графики функций *y = tg x, y = ctg x.*

y = tg x

Так как тангенс обладает периодом, равным π, достаточно построить его график на каком-нибудь промежутке длиной π. Далее его можно будет просто перенести на π единиц влево и вправо. Удобно выбрать промежуток от – π/2 до π/2. Дело в том, что на нем она определена во всех точках, кроме его концов.

Через точки x = – π/2 и x = π/2 проведем штриховые линии – они означают, что график НЕ должен пересекать их. Ясно, что график проходит через точку (0; 0), ведь tg 0 = 0. Тангенс представляет собой дробь sinx/cosx. При увеличении x от 0 до π/2 знаменатель возрастает, а числитель убывает, стремясь к нулю. Поэтому вся дробь неограниченно растет, и график тангенса возрастает до бесконечности:



Перечислим свойства функции y = tg x.

1) $D(y)\colon x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

2) Область значений E(y) – все действительные числа.

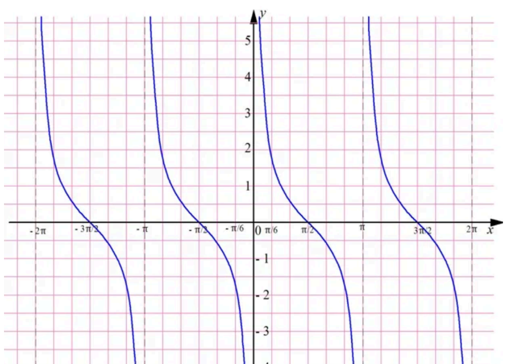
3) Функция y = tg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция y = tg x – периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

5) Функция y = tg x возрастает при $D(y)\colon x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

y = ctg x

График котангенса – это тангенсоида, которая отображена симметрично относительно оси Ox и смещена на π/2:



Можно заметить, что вертикальные штриховые линии (асимптоты) графика проходят через точки, кратные π: –2π, – π, 0, π, 2π… Они разбивают координатную прямую на интервалы (– 2π; – π), (– π; 0), (0; π), (π; 2π), на каждом из которых ф-ция y = ctgx убывает. Видно, что котангенс – это периодическая ф-ция с периодом π.

1) D(y): x ∈ (πn; πn+π). Другими словами, котангенс не определен для x = πn, где n ∈ Z.

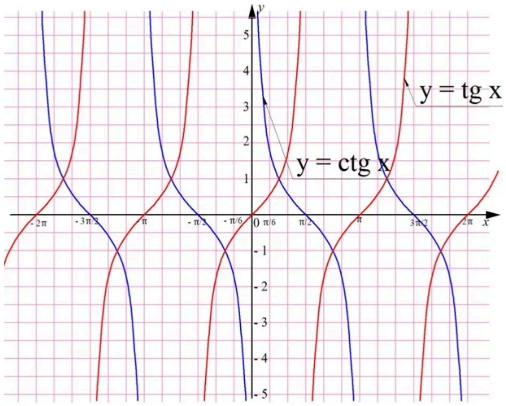
2) Область значений E(y) — все действительные числа.

3) Функция y = ctg x — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция y = ctg x — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π.

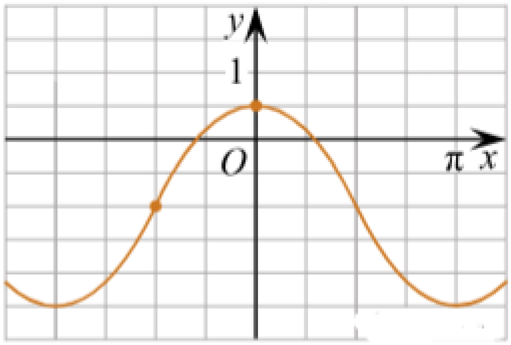
5) Функция y = ctg x убывает при x ∈ (πn; πn+π), то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

Для сравнения покажем на одной плоскости графики тангенса и котангенса:



Задачи

Задание 1. На рисунке изображён график функции $y=a\cdot cosx+b$ Найдите a.



Решение.

Вариант 1:

По рисунку множество значений функции:

$-2{,}5 \le a\cdot cosx + b \le 0{,}5$

Заметим, что, если добавить к левой и правой части 1 получим:

$-2{,}5 \le a\cdot cosx + b \le 0{,}5 \quad |+1$

$-1{,}5 \le a\cdot cosx + b + 1 \le 1{,}5$

Откуда b = – 1

$(-1)\cdot 1{,}5 \le (1\cdot a)\cdot cosx \le 1\cdot 1{,}5$

Откуда a = 1,5

Решение 2:

По графику $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) =- 1$, тогда $a \bullet cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b =- 1$

$$a \bullet 0 + b =- 1$$

$$b =- 1$$

Далее, по графику $f(0) = 0,5$, тогда $a \bullet cos(0) - 1 = 0,5$

$a \bullet 1 = 0,5 + 1$

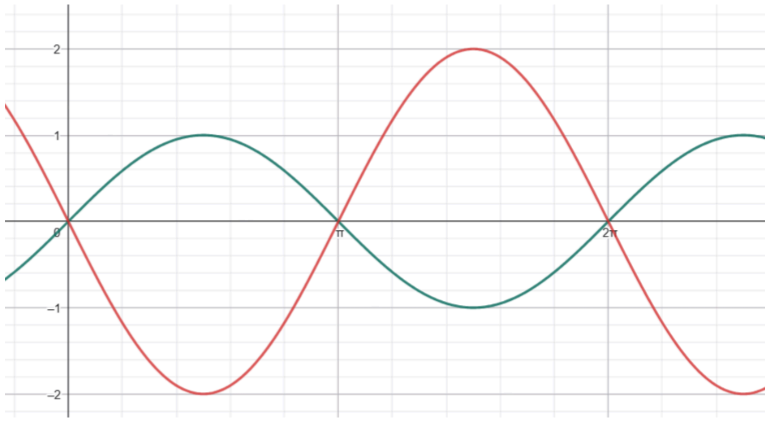
$a = 1,5$

Ответ: a = 1,5

Задание 2. Постройте график функции: $y = -2sinx$.

Решение: для поточечного построения на промежутке: x∈[0; 2π] построим таблицу:

x	0	π/6	π/2	5π/6	π	7π/6	3π/2	11π/6	2π
sinx	0	1/2	1	1/2	0	–1/2	–1	–1/2	0
–2sinx	0	–1	–2	–1	0	1	2	1	0



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Перечислите основные свойства y = cos x.

1.2. Перечислите основные свойства y = sin x.

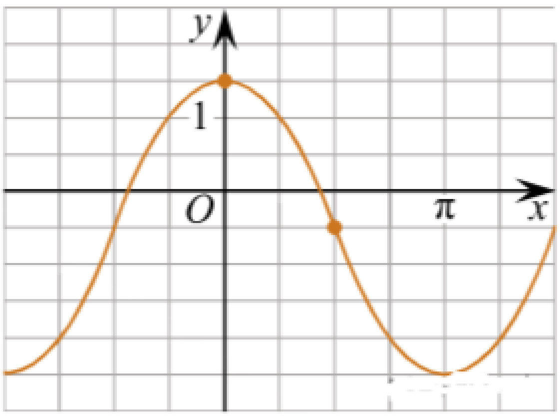
1.3. Перечислите основные свойства y = tg x.

1.4. Перечислите основные свойства y = ctg x.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Постройте график функции: $y = 3sinx$;

2.2. На рисунке изображён график функции $y=a \cdot cosx+b$ Найдите a.



ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 2 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 26.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 26.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.