Chapitre 5
Équations différentielles et primitives

🖥️ **Tout le cours sur les équations différentielles en vidéo : https://youtu.be/qHF5kiDFkW8**

I. Primitive d'une fonction continue

1. Définition

Exemple

On considère les fonctions suivantes.

$f:\ R\longrightarrow R\ \ et\ \ F:\ R\longrightarrow R\ \ x\longmapsto 2x\ +\ 3\quad x\longmapsto x^{2}\ +\ 3x\ -\ 1$

On constate que F est dérivable sur R et $\forall x\in R,\ F^{'}(x) = \ 2x\ +\ 3\ =\ f(x)$

On dit dans ce cas que F est une **primitive** de f sur R.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que

$$F^{'}\ =\ f$$

Remarques

- Dans ces conditions, on a l'équivalence « F admet pour dérivée f » et « f admet pour primitive F ».
- Certaines fonctions n'admettent aucune primitive qui s'exprime avec des fonctions usuelles. La fonction définie sur R par $f(x) = e^{-x^{2}}$ est dans ce cas de figure.

Exemple

La fonction F définie sur R par

$$F(x) = \frac{x^{2}}{2}$$

est une primitive de la fonction f définie sur R par

$$f(x) =\ x$$

En effet,

$$\forall x\in R, F^{'}(x) =\ f(x)$$

2. Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle de définition
$f(x)\ =\ a,\ a\in R$	$F(x) =\ ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)\ = x^{n},\ n\in N\backslash\{-\ 1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\{R\ si\ n\geq 0\ R^{*}\ si\ n\ <\ 0$
$f(x)\ = \frac{1}{x^{n}},\ n\in N^{*}$	$F(x) =-\ \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\{R\ si\ n\geq 0\ R^{*}\ si\ n\ <\ 0$
$f(x)\ = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)\ =\ 2\sqrt{x}$	$]0;+\ \infty[= R_{+}^{*}$
$f(x)\ = \frac{1}{x}$	$F(x)\ =\ lx$	$]0;+\ \infty[= R_{+}^{*}$
$f(x)\ = e^{x}$	$F(x)\ = e^{x}$	$\mathbb{R}$
$f(x)\ =\ \ln ln\ x$	$F(x) =\ x\times \ln ln\ (x)\ \ -\ x$	$]0;+\ \infty[= R_{+}^{*}$

Remarques

- La formule en noir est un cas particulier de la précédente (il suffit de remplacer n par $-\ n$).
- La formule en vert n'est pas au programme mais rudement pratique…
- Toutes ces formules se déduisent se déduisent des règles usuelles de dérivation.

3. Linéarité des primitives

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors $F + G$ **est une primitive de** $f + g$
Si k est un nombre réel, kF **est une primitive de** kf.

Démonstration

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

4. Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n,\ n\in N\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0$, la fonction doit être non nulle sur I $\forall x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$l\lvert u\rvert$	$u\neq 0$ (u ne s'annule par sur I)
$u'e^u$	e^u	

Méthode
Recherche de primitives
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g**
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

$a.\ f(x) = x^3 - 2x \text{ sur } I = R$

$b.\ f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} \text{ sur } I =]0; +\infty[$

$c.\ f(x) = (2x - 5)\left(x^2 - 5x + 4\right)^2 \text{ sur } I = R$

$d.\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ sur } I = R$

$e.\ f(x) = \frac{3x}{x^2+2} \text{ sur } I = R$

$f.\ f(x) = xe^{x^2} \text{ sur } I = R$

Solution

$a.\ \text{Soit } x\in R,\ F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

$b.\ \text{Soit } x\in]0; +\infty[, f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3} \text{ donc } F(x) = x^3 - 3\times\frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

$c.\ \forall x\in R, f(x) = (2x - 5)\left(x^2 - 5x + 4\right)^2 \text{ du type } u'u^n \text{ avec } u(x) = x^2 - 5x + 4 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 4\right)^3$

$d.\ \forall x\in R,\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ du type } \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ avec } u(x) = x^2 + 1 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$

$e.\ \text{Soit } x\in R, f(x) = \frac{3x}{x^2+2} = \frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+2} \text{ du type } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x) = x^2 + 2 \text{ donc } F(x) = \frac{3}{2}\ln ln\left(x^2 + 2\right)$

$f.\ \text{Soit } x\in R, f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}\times 2xe^{x^2} \text{ du type } u'e^u \text{ avec } u(x) = x^2 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

Propriété
f est une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel k, la fonction $x\longmapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.

Démonstration
F est une primitive de f. On pose $G(x) = F(x) + k$
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$
Donc G est une primitive de f.

Propriété
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque
Bien que l'existence en soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue (ou utilisée…).
Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite. En fait, cette primitive égale

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \times erfi(x)$$

Où la fonction erfi désigne la fonction d'erreur imaginaire. Elle a été inventée pour combler le vide de cette fonction. La primitive de cette fonction n'a d'ailleurs pas de nom… pour l'instant !

II. Équations différentielles

1. Définition

Définition
Une **équation différentielle** est une équation dont les inconnues sont des fonctions qui sont mises en relation avec leurs dérivées successives.

Remarques

- Une équation différentielle est un cas particulier d'**équation fonctionnelle**. Par exemple, considérons l'équation de Cauchy qui est une équation fonctionnelle. Soit f une fonction définie et continue sur R et x et y deux réels, l'équation de Cauchy est donnée par
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
Les seules solutions (continues) de cette équation sont les fonctions linéaires définies sur R par
$$f(x) = ax,\ a \in R$$
Une **équation différentielle** fait intervenir les dérivées de **la fonction souvent notée** y au lieu de f . Par exemple, l'équation
$$y' = 2xy$$
admet comme solutions continues sur R, les fonctions définies par
$$f(x) = Ce^{x^2+B},\ B, C \in R$$
En effet, f est dérivable sur R en tant que fonction composée dérivable sur R et, soit $x \in R$,
$$f'(x) = 2x \times Ce^{x^2+B} = 2x \times f(x)$$
- En terminale, on ne résout que des **équations différentielles ordinaires** (EDO) dont les fonctions ne dépendent que d'**une seule variable** (souvent notée x, parfois t, plus rarement autrement).
- Comme toute équation, le but est de **trouver toutes les solutions** de l'équation et, si ce n'est pas précisé, l'ensemble le plus grand où elles sont définies.
- Si l'équation différentielle met en relation y et y', les solutions trouvées seront donc nécessairement **dérivables** et donc **continues** sur leur domaine de définition.

2. Lien avec les primitives

Soit f une fonction. L'équation différentielle $y' = f$ admet comme solutions

$$y = F + C$$

Où F désigne une primitive de f et C un nombre réel.

3. Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété
Soit $a \in R$. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions définies sur R par

$$f(x) = Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/FQlxi8JKmg4**

- Soient C un réel et la fonction f définie sur R par
$$f(x) = Ce^{ax}$$
f est dérivable sur R en tant que fonction composée dérivable sur R et, soit $x \in R$,

$$f'(x) = C\times ae^{ax} = a\times Ce^{ax} = af(x)$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$

- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

  Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = e^{-ax} \times f(x) g$ est dérivable sur R en tant que produit de fonctions dérivables sur R et soit $x\in R$,

$$g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$$

f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, donc $f'(x) = af(x)$

Ainsi,

$$g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x) = -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$$

La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit

$$e^{-ax} \times f(x) = C$$

Et donc

$$f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$$

Méthode

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

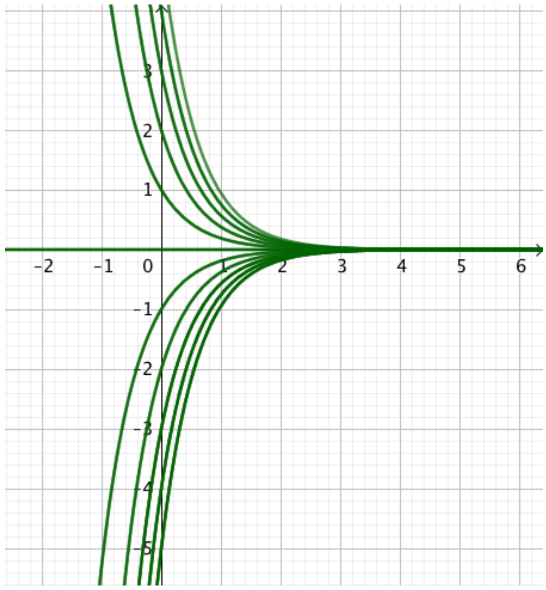
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA**

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1. a. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

1. b. Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.



Solution

1. a. $3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow 3y' = -5y \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{3}y$

Les solutions sont de la forme, soit $x\in R$,

$$y_C(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x},\ C\in R$$

1. b. Pour différentes valeurs de C, on obtient les courbes ci-contre.

2. $y(1) = 2 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = 2 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{5}{3}} = 2 \Leftrightarrow C = 2e^{\frac{5}{3}}$

Et donc, soit $x\in R$,

$$y(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$$

Propriété

Soient $a, k\in R$. Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, alors $f + g$ et kf sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstration

$(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$

$(kf)' = kf' = k\times af = a(kf)$

2. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété

Soient $a, b\in R$, $a\neq 0$. La fonction définie sur R par

$$f(x) = -\frac{b}{a}$$

est la **solution particulière constante** de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

Démonstration

On pose, soit $x\in R$,

$$g(x) = -\frac{b}{a}$$

g est dérivable sur R et soit $x\in R$,

$$g'(x) = 0$$

Or,

$$ag(x) + b = a\times\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$$

g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$

Propriété
Soient $a, b \in R$, $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions de la forme

$$u + v$$

où u est la solution particulière constante de l'équation

$$y' = ay + b$$

et v est une solution quelconque de l'équation

$$y' = ay$$

Remarque
L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire
Soient $a, b \in R$, $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur R par

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } C \in R$$

Méthode
Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w**

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$
1. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$

Solution
1. $2y' - y = 3 \Leftrightarrow 2y' = y + 3 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

Les solutions sont de la forme, soit $x \in R$,

$y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3 \; C \in R$

2. $y(0) = -1 \Leftrightarrow Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = -1 \Leftrightarrow C - 3 = -1 \Leftrightarrow C = 2$

Donc, soit $x \in R$,

$$y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$$