

Concours d'entrée aux Écoles Normales Supérieures

(PC Lyon Cachan , MP et PC (groupe I) Paris Lyon)

Physique

Corrigé.

I

I.A.1 (a) Il s'agit de l'expérience des fentes d'Young.

$$i = \frac{\lambda L'}{d}$$

I.A.1 (b) Classique : On obtient

I.A.1 (c) On peut interpréter cette figure comme une figure d'interférence modulée par une figure de diffraction, avec un contraste faible. On ne distingue nettement que 4 franges. On y distingue 22 points de mesures de durée 10 mn, ce qui représente une petite matinée de travail...

I.A.1 (d) $\lambda = \frac{di}{L'} \approx \frac{8 \times 4}{0.64} = 50 \text{ pm}$ en prenant en compte 8 points de mesure, ce qui donne une incertitude de l'ordre de $\frac{1}{8} \approx 10\%$.

I.A.1 (e) D'après les relations de de Broglie, $v = \frac{\hbar}{m\lambda} = 320 \text{ m/s}$. D'où $E_c = 3.4 \times 10^{-22} \text{ J}$.

$T = \frac{E_c}{2k_B} = 12 \text{ K}$: Il faut refroidir l'enceinte pour augmenter λ .

I.A.2 (a) N représente par exemple le nombre de période dans un train d'onde. On écrit

classiquement que $\tau_c \Delta \omega \# 2\pi$. Soit encore $c \tau_c \frac{\Delta \omega}{\omega} \frac{\omega}{c} = L_c \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \# 2\pi$ où L_c représente la

longueur d'un train d'onde. Soit enfin $L_c \# N\lambda$ avec $N = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$.

I.A.2 (b) ?

I.A.2 (c) D'après la statistique de Maxwell-Boltzmann, La loi de distribution de vitesses

$$\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

possède un terme en , ce qui va assurer un écart-type de la distribution

d'énergie de l'ordre de $k_B T$, du même ordre de grandeur que l'énergie cinétique moyenne.

La dispersion de la vitesse, et donc celle de λ , seront grandes : la source ne peut être très monochromatique.

I.A.2 (d) On devrait observer une cinquantaine de franges dans ces conditions. On en observe environ 4 : Un autre facteur intervient.

I.A.3 (a) La figure de diffraction module la figure d'interférence. Le pied de la tache de

diffraction est en $x = \frac{\lambda L'}{b}$. On devrait donc observer $\frac{d}{b} = 8$ franges pour $x > 0$. Ce ne semble donc pas être le facteur limitant.

I.A.3 (b) Les différences de marche introduites entre S_1 et S_2 sont de l'ordre de $\frac{bl}{L} \approx 3 \text{ pm} \ll \lambda$. On peut donc considérer que S_2 et S'_2 sont spatialement cohérentes. Il faut cependant veiller à

bien respecter l'axe optique : si l'on décale S_1 de $\frac{\lambda L}{l} = 26 \mu\text{m}$ verticalement, les fentes ne sont plus éclairées.

I.A.3 (c) Il faut comme en optique assurer le parallélisme des fentes, sous peine de voir la figure d'interférence se déformer.

I.A.3 (d) On perd la moitié de l'énergie lumineuse sans changer la figure. Il faut attendre deux fois plus longtemps pour obtenir le même nombre de coups.

I.A.4 (a) 1 s^2 .

$$E_f = -2 \times 13,6 \text{ eV} \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \approx -80 \text{ eV}$$

I.A.4 (b) $1 \text{ s}^1 \ 2 \text{ s}^1$.

D'après les règles de Slater, les Z_{eff} des deux électrons valent respectivement 2 et 1,15.

$$E_e = -13,6 \text{ eV} \left(\frac{2^2}{1^2} + \frac{1,15^2}{2^2} \right) \approx -60 \text{ eV}$$

La désexcitation libère la différence, à savoir 20 eV .

I.A.4 (c) $\frac{L + L'}{v} \approx 3 \times 10^{-3} \ll 9000 \text{ s}$.

I.A.5 (a) Une fente trop fine demande des temps de pose longs. Une fente trop large mesure la moyenne de l'éclairement sur la largeur de la fente. Ceci lisse la courbe et donc affaiblit le contraste.

I.A.5 (b) Le choix du « pas » du capteur égal à l'interfrange impose à chaque fente de recevoir le même éclairement. Cela permet donc de recueillir 7 fois plus d'énergie lumineuse pour la même résolution (largeur de fente).

I.A.5 (c) Tout dépend de l'équipement initial. Citons

- Obtention de basses températures.
- Réalisation des fentes (gravure optique probablement).
- Alignement des système de fentes sur l'axe optique.

I.B Condensats de Bose-Einstein (Cornell-Ketterle-Wiemann) : Cela ouvre la voie à la réalisation de lasers atomiques, plus puissants et plus précis(pm) que les lasers optiques (μm) .

II

II.A.1 Le moment des forces sur l'élément ABCD est nul ; cela conduit à (1). La résultante est nulle également, d'où (2) et (3).

II.A.2 Notons $[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{mm} & \sigma_{mn} \\ \sigma_{nm} & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Alors $[\sigma'] = P^{-1} [\sigma] P$.
Soit

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \sigma_{zz} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xz} + \sin^2 \theta \sigma_{xx} & \sin \theta \cos \theta (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{xz} \\ \sin \theta \cos \theta (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{xz} & \cos^2 \theta \sigma_{zz} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xz} + \sin^2 \theta \sigma_{xx} \end{bmatrix}$$

II.A.3 La loi de Coulomb se traduit alors par $|\sigma_{mn}| < f |\sigma_{nn}|$.

II.B.1 Notons $\overset{\vee}{F}_g(q, r), \overset{\vee}{F}_c(q, r)$ et $\overset{\vee}{F}_d(q, r)$ les trois forces demandées (gauche, centre, droite).

On a $\tan \beta = \frac{F_{dx}(q, r)}{F_{dz}(q, r)} = -\frac{F_{gx}(q, r)}{F_{gz}(q, r)}$, $\overset{\vee}{F}(q, r) = \overset{\vee}{F}_g(q, r) + \overset{\vee}{F}_c(q, r) + \overset{\vee}{F}_d(q, r)$,
 $wF_z(q, r) = F_{cz}(q, r)$ et $0 = F_{cx}(q, r)$. De ces six relations scalaires on déduit :

$$\begin{aligned} F_{gx}(q, r) &= \frac{1}{2} (F_x(q, r) - F_z(q, r)(1 - w) \tan \beta) \\ F_{gz}(q, r) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{F_x(q, r)}{\tan \beta} + F_z(q, r)(1 - w) \right) \\ F_{dx}(q, r) &= \frac{1}{2} (F_x(q, r) + F_z(q, r)(1 - w) \tan \beta) \\ F_{dz}(q, r) &= \frac{1}{2} \left(+\frac{F_x(q, r)}{\tan \beta} + F_z(q, r)(1 - w) \right) \\ F_{cx}(q, r) &= 0 \\ F_{cz}(q, r) &= wF_z(q, r) \end{aligned}$$

II.B.2 L'équilibre du grain (q,r) se traduit par

$$\overset{\vee}{F}(q, r) = \overset{\vee}{F}_g(q-1, r+1) + \overset{\vee}{F}_c(q-1, r) + \overset{\vee}{F}_d(q-1, r-1) + p_0 \overset{\boxtimes}{u}_z,$$

Soit en tenant compte des résultats de II.B.1 :

$$\begin{aligned} F_x(q, r) &= \frac{1}{2} [F_x(q-1, r-1) + F_x(q-1, r+1) + (1-w) \tan \beta (F_z(q-1, r-1) - F_z(q-1, r+1))] \\ F_z(q, r) &= \frac{1}{2} \left[\frac{F_x(q-1, r-1) - F_x(q-1, r+1)}{\tan \beta} + (1-w) (F_z(q-1, r-1) + F_z(q-1, r+1)) + 2wF_z(q-1, r) \right] + p_0 \end{aligned}$$

II.B.3 Compte tenu de $\tan \beta = \frac{\Delta x}{\Delta z}$, ces deux équations deviennent, par DL1 :

$$-\partial_z F_x - (1-w) \tan^2 \beta \partial_x F_z = 0$$

$$-\partial_z F_z - \partial_x F_x + \frac{p_0}{\Delta z} = 0$$

Ce qui correspond bien aux équations (2) et (3), si $p_0 = \rho g \Delta z$ et $\eta = (1-w) \tan^2 \beta$.

$$\text{II.C.1 (a)} \quad \partial_z(2) - \partial_x(3) \Rightarrow \partial_z^2 \sigma_{zz} - c_0^2 \partial_x^2 \sigma_{zz} = 0. \quad \partial_z(3) - c_0^2 \partial_x(2) \Rightarrow \partial_z^2 \sigma_{xz} - c_0^2 \partial_x^2 \sigma_{xz} = 0.$$

σ_{xx} obéit à la même équation car proportionnel à σ_{zz} .

II.C.1 (b) les contraintes sont uniformes sur les droites $x = \pm c_0 z$.

$$\text{II.C.2 (a)} \quad \mu = c_+ - c_- \quad \text{et} \quad \eta = -c_+ c_-.$$

II.C.2 (b) On a $\partial_x = \partial_u + \partial_v$ et $\partial_z = -(c_+ \partial_u + c_- \partial_v)$. En tenant compte de (4), (2) et (3) deviennent :

$$\begin{aligned} \partial_u T_+ + \partial_v T_- &= \rho g \\ c_- \partial_u T_+ + c_+ \partial_v T_- &= 0 \end{aligned}$$

Où $T_{\pm}$ sont définis à la question suivante. (5) et (6) en sont visiblement les solutions.

II.C.2 (c) $\partial_u(T_+ + c_+ \rho g z) = \partial_u T_+ + \frac{c_+}{c_- - c_+} \rho g = 0$ d'après (5). Donc $(T_+ + c_+ \rho g z)$ ne dépend que de v et est donc uniforme sur les droites (caractéristiques) de pente c_- .

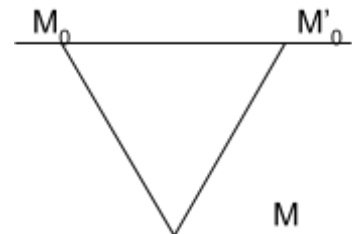
De même $\partial_v(T_- + c_- \rho g z) = \partial_v T_- + \frac{c_-}{c_+ - c_-} \rho g = 0$ d'après (6). Donc $(T_- + c_- \rho g z)$ ne dépend que de u et est donc uniforme sur les droites (caractéristiques) de pente c_+ .

II.C.3 (a) Il vient directement des définition de $T_{\pm}$ que

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{T_+ - T_-}{c_- - c_+} \\ \sigma_{xz} &= \frac{c_- T_+ - c_+ T_-}{c_- - c_+} \\ \sigma_{xx} &= \frac{c_-^2 T_+ - c_+^2 T_-}{c_- - c_+} \end{aligned}$$

II.C.3 (b) M et M_0 étant sur la même droite de pente c_+ , $T_-(M) = T_-(M_0) + c_- \rho g(z_0 - z)$. De même M et M'_0 étant sur la même droite de pente c_- , $T_+(M) = T_+(M'_0) + c_+ \rho g(z'_0 - z)$. Intérêt : les contraintes en un point M se déduisent de celles en M_0 et M'_0 qui peuvent être judicieusement choisis.

II.C.4 (a) Cf. ci-contre.



II.C.4 (b) $T_{\pm}(M) = -c_{\pm} \rho g z$ d'après II.C.3 (b). D'où

$$\sigma_{zz} = \rho g z$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \eta \rho g z$$

La pression verticale suit la statique des fluides. Les contraintes tangentielles sont nulles car la gauche et la droite sont équivalentes.

II.D.1 (a) Les relations de parité ne sont pas inscrites dans les équations générales à priori ?

Elles dépendent de la forme du tas. On voit bien ici qu'il faut σ_{zz} et σ_{xx} paires (les pressions sont identiques à gauche et à droite) et σ_{xz} impaire. Les grains sur l'axe n'étant pas plus entraînés vers la gauche que vers la droite par leur voisin du dessus, on doit avoir $\sigma_{xz}(z,0) = 0$.

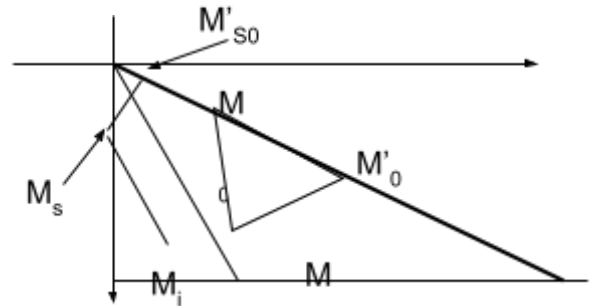
II.D.1 (b) μ doit être impaire. Il n'y a pas continuité du modèle en $x=0$.

II.D.2 Cf. ci contre. La zone interne est hachurée. La zone externe existe si $c > c_+$. M_s et M_i sont sur la

$$Z_s = Z - \frac{x}{c_+}$$

même droite de pente c_+ , donc

II.D.3 (a) $T_{\pm} = a_{\pm}(x - cz)$ car ces quantités sont visiblement affines en x et z et doivent s'annuler sur la surface.



Déterminons a_+ : $\partial_u T_+ = a_+ \frac{c_- - c}{c_- - c_+}$ et $\partial_u T_+ = \frac{c_+}{c_+ - c_-} \rho g$ d'après (5) d'où a_+ . On procède de même pour a_- . Finalement :

$$T_+ = \frac{c_+}{c - c} \rho g(x - cz)$$

$$T_- = \frac{c_-}{c - c_+} \rho g(x - cz)$$

Les expressions des contraintes sont laides.

II.D.3 (b) On se sert du point M'_{s_0} pour calculer $T_+(M_s)$. Et de $\sigma_{xz}(z,0)=0$ (II.D.1.a) et (II.C.3.a) pour en déduire $T_-(M_s)$. Il vient :

$$T_+(M_s) = \frac{c_+}{c - c} \rho g(-cz_s)$$

$$T_-(M_s) = \frac{c_-}{c - c_-} \rho g(-cz_s)$$

II.D.3 (c) On a : $T_-(M) = T_-(M_s) + c_- \rho g(z_s - z)$ car les deux points sont sur la même droite de pente c_+ . Et $T_+(M)$ se calcule comme en II.D.3 (a) (cf figure). D'où en substituant z_s par sa valeur :

$$T_+(M) = \frac{c_+}{c - c_-} \rho g(x - cz)$$

$$T_-(M) = \frac{c_-}{c - c_-} \rho g\left(\frac{c_-}{c_+} x - cz\right)$$

On vérifie bien la continuité de T_- sur la droite de séparation des zones $x = c_+ z$. Les expressions des contraintes sont encore laides.

II.D.4 (a) On a $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sigma_{mn}}{\sigma_{nn}} = \frac{\delta F_T}{\delta F_N} = -f$ vu l'orientation des axes (Cf. figure 7 tournée de θ), car le tas s'écroule vers le bas.

II.D.4 (b) $\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} = \frac{c_- T_+ - c_+ T_-}{c_-^2 T_+ - c_+^2 T_-} = \frac{1}{c}$ après simplifications. En reportant dans la formule de

changement de base, compte tenu de $c = \tan \theta$ on arrive à $\frac{\sigma_{mn}}{\sigma_{nn}} = -\frac{1}{c}$, soit $f = \tan \phi$: on retrouve l'idée du cône de frottement : un grain posé sur le tas glisse jusqu'en bas si $f < \tan \phi$.

II.D.4 (c) De la définition de η et μ on déduit $\eta = \frac{1 - \mu f}{1 + 2f^2}$ ce qui est bien la forme exigée

avec $\eta_0 = \frac{1}{1 + 2 \tan^2 \phi} < 1$.

II.D.4 (d) Les pentes de $\sigma_{zz}(h, x)$ valent respectivement $\frac{\mu - c}{(c - c_+)(c - c_-)}$ et $-\frac{\mu}{c_+(c - c_-)}$

dans les zones externes et internes. On a $c > c_+ > c_-$ et $\mu - c = -c \frac{\eta}{\eta_0} < 0$. Donc la pente est négative dans la zone externe et du signe de $-\mu$ dans la zone interne. Il semble donc au vu de la figure 6 qu'une construction en entonnoir conduise à une constante (pas très constante) μ négative, et qu'une construction en pluie à une constante positive.

-FIN-