

1.- Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en (0, 4) y su recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas.

Resolución

Como f es una función polinómica es derivable y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

– Al tener un punto de inflexión en $x = 0$, $f''(0) = 0$. Luego, $6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), entonces $f(0) = 4$. Luego, $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4$

– Como recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas, entonces la recta tangente en dicho punto es paralela al eje de abscisas. Luego, la pendiente de la recta tangente es 0, es decir $f'(1) = 0$.

Obtenemos, $3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ y como $b = 0$, se tiene que $3a + c = 0$

– Como además la gráfica pasa por el punto (1, 8), entonces $f(1) = 8$. Luego, $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 8$

Y como $b = 0$, $d = 4$, se tiene que $a + c + 4 = 8$, con lo que $a + c = 4$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + c = 4 \end{cases}$. Restando las ecuaciones obtenemos $2a = -4$, de donde $a = -2$

Sustituyendo en la 2ª ecuación el valor $a = -2$ se obtiene, $-2 + c = 4$, de donde $c = 6$.

Conclusión: debe ser $a = -2$, $b = 0$, $c = 6$, $d = 4$

2.- Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ (para $x \neq -3$, $x \neq 1$)

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

Resolución

Como $x^2 + 2x - 3 = 0$ si $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $x = 1$ $x = -3$, para $x = 1$, $x = -3$ no es continua por no estar definida.

$$\text{Como } f(x) = \frac{(-3)^2 - 10}{(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \quad f(x) = \frac{1^2 - 10}{1^2 + 2 \cdot 1 - 3} = \frac{-9}{0} = \pm\infty$$

f tiene una asíntota vertical en $x = 1$ cuya ecuación es A.V. : $x = 1$ y otra asíntota vertical en $x = -3$ cuya ecuación es A.V. : $x = -3$.

Además:

$$f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad f(x) = \frac{-9}{0^-} = +\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

Estudiemos las asíntotas en $\pm\infty$:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1. \text{ Luego, f tiene asíntota horizontal en } \pm\infty \text{ de ecuación A.H: } y = 1$$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} - 1 = \frac{x^2 - 10 - x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $-\infty$

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, -3\}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Además, } f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 10)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x - 2x^3 - 2x^2 + 20x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 ;$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 3}{2}, \quad x = -2 \quad x = -5$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$. Para ello, tenemos en cuenta que $y = 2x^2 + 14x + 20$ es una parábola convexa que corta al eje X en -5 y -2 :

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	decreciente	creciente	creciente

f es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-2, +\infty) - \{1\}$ y decreciente en $(-5, -2) - \{-3\}$

3.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$.

a) Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

Resolución

f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(a, f(a))$ es $\text{rtg: } y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Como $f'(a) = e^a$ y $f(a) = e^a$, $\text{rtg: } y = e^a(x - a) + e^a$

Como la rtg debe pasar por el origen de coordenadas, $(0, 0)$: $0 = e^a(0 - a) + e^a \rightarrow ae^a = e^a$, de donde $a = 1$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas.

Resolución

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty ; \quad f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

Como $f'(x) = e^x > 0$, f es creciente; como $f''(x) = e^x > 0$, f es convexa

Los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:

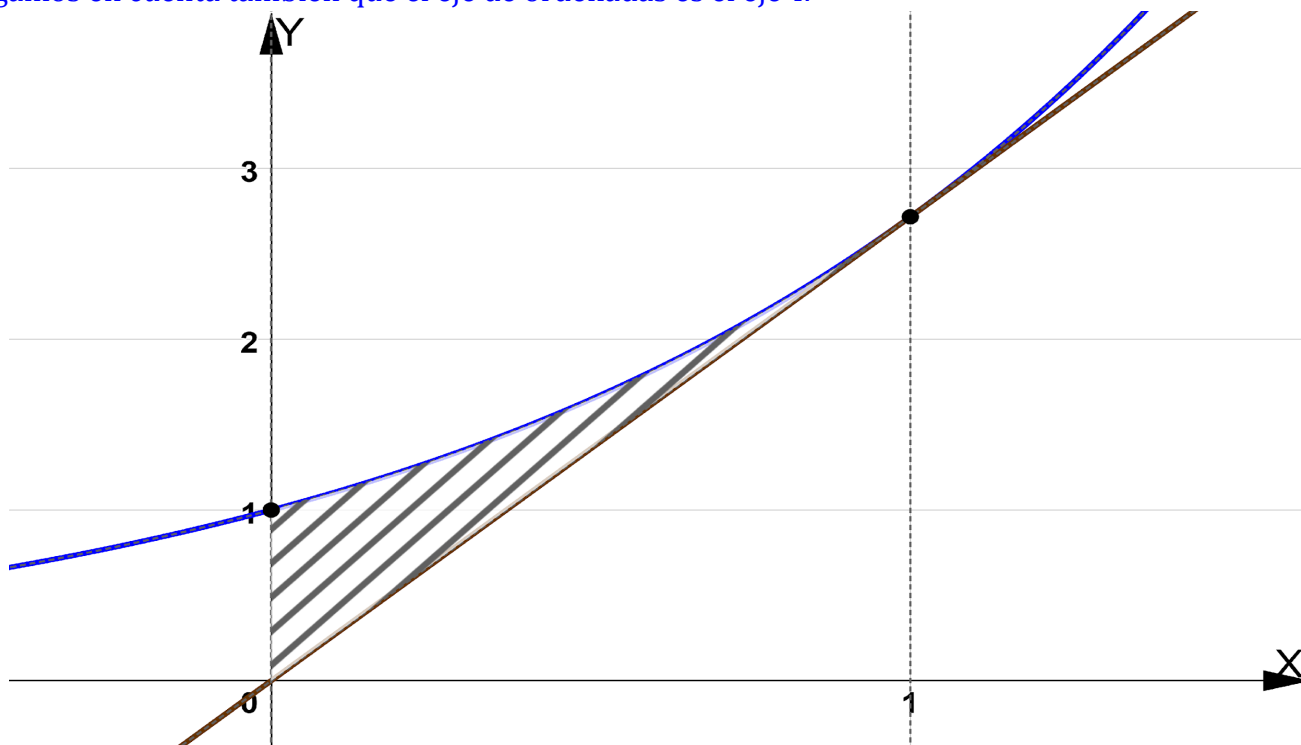
eje X: Como $e^x > 0$, la gráfica no corta al eje X

eje Y: $x = 0, y = f(0) = e^0 = 1$. Punto $(0, 1)$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $A(1, f(1))$ es

rtg: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Como $f'(1) = e^1 = e$ y $f(1) = e^1 = e$, rtg: $y = e(x - 1) + e \rightarrow$ rtg: $y = ex$

Tengamos en cuenta también que el eje de ordenadas es el eje Y.



El área que se pide es $A = \int_0^1 (e^x - ex) dx$.

Como $\int (e^x - ex) dx = e^x - \frac{ex^2}{2} + k = \frac{2e^x - ex^2}{2} + k$, una primitiva es $p(x) = \frac{2e^x - ex^2}{2}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{2e^1 - e \cdot 1^2}{2} - \frac{2e^0 - e \cdot 0^2}{2} = \frac{e}{2} - \frac{2}{2} = \frac{e-2}{2}$

4.- Calcula $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx$

Resolución

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ o } x = 1$$

Teniendo en cuenta que $y = x^2 - 3x + 2$ es una parábola convexa que corta al eje X en 1 y 2, se tiene que $|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Usando la linealidad de la integral definida respecto del intervalo de integración,

$$I = \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \stackrel{I_1}{=} + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx \stackrel{I_2}{=}$$

$$\text{Hallemos } I_1. \text{ Como } \int (-x^2 + 3x - 2) dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + k = \frac{-2x^3 + 9x^2 - 12x}{6} + k.$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = \frac{-2x^3 + 9x^2 - 12x}{6}.$$

Por la regla de Barrow, $I_1 = p(2) - p(1) = \frac{-2.2^3 + 9.2^2 - 12.2}{6} - \frac{-2.1^3 + 9.1^2 - 12.1}{6} = \frac{-4}{6} - \frac{-5}{6} = \frac{1}{6}$

Halleemos I_2 . Como $\int (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + k = \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x}{6} + k$.

Una primitiva es $q(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x}{6}$.

Por la regla de Barrow, $I_2 = q(3) - q(2) = \frac{2.3^3 - 9.3^2 + 12.3}{6} - \frac{2.2^3 - 9.2^2 + 12.2}{6} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$

Por tanto, la integral que se pide es $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$

5.- Sabiendo que $\left[\frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x} \right]$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

Vamos a hallar el límite: $\left[\frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x} \right] = \frac{0+1}{\ln(0+1)} - \frac{a}{0} = \frac{1}{0} - \frac{a}{0}$ Indeterminación

El límite lo podemos expresar así: $\frac{x(x+1) - a \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \frac{0(0+1) - a \ln(0+1)}{0 \ln(0+1)} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital: $\frac{2x+1 - \frac{a}{x+1}}{1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{1-a}{0}$

Se puede aplicar. Por tanto, $\frac{x(x+1) - a \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \frac{1-a}{0}$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $1-a=0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $a=1$

Volviendo al cálculo anterior y sustituyendo $a=1$: $\frac{2x+1 - \frac{1}{x+1}}{1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Operamos primero:

$$\frac{\frac{(2x+1)(x+1)-1}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \frac{(2x+1)(x+1)-1}{(x+1)\ln(x+1)+x} = \frac{2x^2+3x}{(x+1)\ln(x+1)+x} = \frac{0+0}{0+0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterm.}$$

Veamos si podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital.

$$\frac{(2x^2+3x)'}{[(x+1)\ln(x+1)+x]'} = \frac{4x+3}{1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} + 1} = \frac{4x+3}{\ln(x+1)+2} = \frac{3}{2}$$

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para $a=1$, vale $\frac{3}{2}$

6.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^2+b}{a-x}$ (para $x \neq a$).

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4.

Resolución

- La pendiente de la asíntota oblicua

$$\text{es } \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x} = \frac{ax^2+b}{ax-x^2} = \frac{ax^2}{-x^2} = -a. \text{ Luego, } -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

- Como la gráfica de f pasa por el punto (2, 3), entonces f(2) = 3. Luego,

$$\frac{a \cdot 2^2 + b}{a - 2} = 3 \text{ como } a = 4 \rightarrow \frac{16 + b}{2} = 3$$

Luego, $16 + b = 6$, de donde $b = -10$. Conclusión: debe ser $a = 4$, $b = -10$

b) Para $a = 2$ y $b = 3$, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

$$\text{Para } a = 2 \text{ y } b = 3, f(x) = \frac{2x^2+3}{2-x} \quad f'(x) = \frac{4x(2-x) - (2x^2+3)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x - 4x^2 + 2x^2 + 3}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 3}{(2-x)^2}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ y la de la recta normal es } rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{En este caso, } x_0 = 1; f'(x_0) = f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 3}{(2-1)^2} = 9 \quad ; \quad f(x_0) = f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 3}{2-1} = 5$$

$$\text{rtg: } y = 9(x - 1) + 5 \Rightarrow \text{rtg: } y = 9x - 4 \quad rn: y = \frac{-1}{9}(x - 1) + 5 \Rightarrow rn: y = \frac{46 - x}{9}$$

7.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + |x - 1|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Resolución

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Teniendo en cuenta que $y = x - 1$ es una recta creciente que corta al eje X en 1, se tiene

$$\text{que } f(x) = \begin{cases} x^2 + (-x + 1), & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1^2 - 1 + 1 = 1; f(x) = 1^2 + 1 - 1 = 1; f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1 \quad ; f \text{ es continua en } x = 1$$

$$\text{Para } x \neq 1 \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1; f'(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0, & x < 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0, & x > 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (imposible)} \end{cases} \text{ Hagamos una tabla de signos de } f'(x):$$

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	$\nexists$	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y creciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$

$$\text{b) Calcula } \int_0^2 f(x) dx$$

Resolución

Usando la linealidad de la integral definida respecto del intervalo de integración,

$$I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx \stackrel{I_1}{=} + \int_1^2 (x^2 + x - 1) dx \stackrel{I_2}{=}$$

Hallemos I_1 . Como $\int (x^2 - x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6} + k$, una primitiva

$$\text{es } p(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6} \Rightarrow \text{Regla de Barrow, } I_1 = p(1) - p(0) = \frac{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1}{6} - \frac{2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0}{6} = \frac{5}{6}$$

Hallemos I_2 . Como $\int (x^2 + x - 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + k = \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x}{6} + k$. Una primitiva

$$\text{es } p(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x}{6}. \text{ Por Barrow, } I_2 = p(2) - p(1) = \frac{2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2}{6} - \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1}{6} = \frac{16}{6} - \frac{-1}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\text{Por tanto, la integral que se pide es } I = I_1 + I_2 = \frac{5}{6} + \frac{17}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

8.- Considera la función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^x$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas $x = 2$, $y = x$.

Resolución

Los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:

eje X: $y = xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$. La gráfica corta al eje X en el punto $(0, 0)$

eje Y: $x = 0, y = 0. e^0 = 0$. Punto $(0, 0)$

f es continua y derivable en $[0, +\infty)$, $f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0$. Luego, f es creciente

Asíntotas:

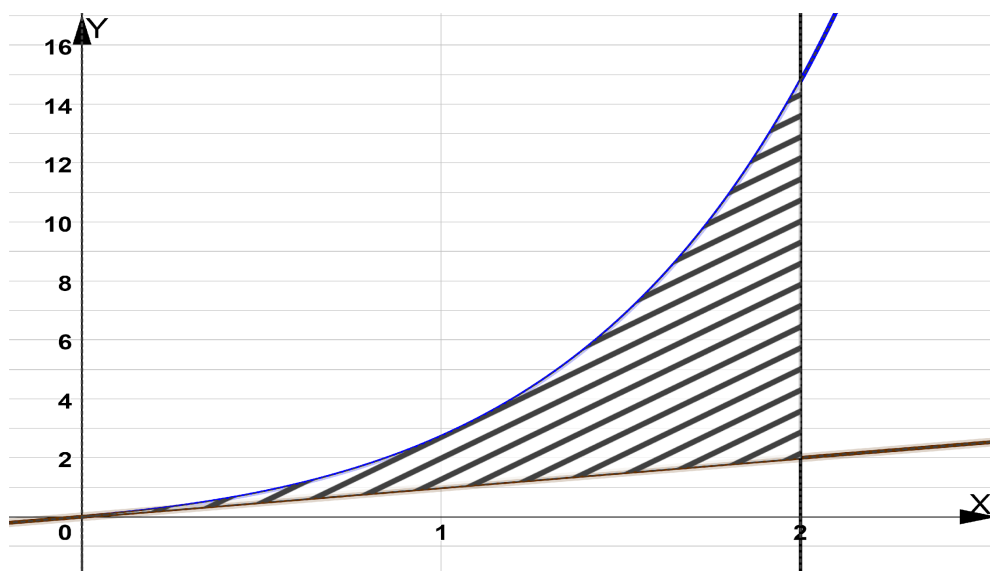
Como f es continua, no hay asíntotas verticales.

En $+\infty$: $f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty$. No hay asíntota horizontal

Veamos si tiene asíntota oblicua: AO: $y = mx + n$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{xe^x}{x} = e^x = +\infty$.

No tiene.

La recta $x = 2$ es la vertical que pasa por $(2, 0)$ y la recta $y = x$ es la bisectriz del I y III cuadrante.



b) Determina el área del recinto anterior.

Resolución

El área que se pide es $A = \int_0^2 (xe^x - x) dx$;

$$I = \int (xe^x - x) dx = \int (xe^x) dx - \int x dx = \int (xe^x) dx \stackrel{I_1}{=} -\frac{x^2}{2}$$

Hallems I_1 por el método de integración por partes

$$[u = x \text{ y } dv = e^x dx \text{ y } v = e^x] \Rightarrow$$

$$I_1 = \int u dv = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$$

$$\text{Luego, } I = e^x(x - 1) - \frac{x^2}{2} + k = \frac{2e^x(x-1) - x^2}{2} + k. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{2e^x(x-1) - x^2}{2}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A = p(2) - p(0) = \frac{2e^2(2-1) - 2^2}{2} - \frac{2e^0(0-1) - 0^2}{2} = e^2 - 2 - (-1)$$

$$A = (e^2 - 1) u^2$$

9.- (prueba extraordinaria) Calcula a y b sabiendo que $\frac{a(1 - \cos x) + b \sin x - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$

Resolución

$$7 = \frac{a(1 - \cos x) + b \sin x - 2(e^x - 1)}{x^2} = \frac{a(1 - \cos 0) + b \sin 0 - 2(e^0 - 1)}{0^2} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 - 2 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterm.}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{a \sin x + b \cos x - 2e^x}{2x} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 1 - 2}{0} = \frac{b - 2}{0}$$

Como queremos que el límite sea finito, pues debe valer 7, debe ser $b - 2 = 0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $b = 2$ y quedaría otra vez una indeterminación $\frac{0}{0}$

Veamos si podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{(a \sin x + b \cos x - 2e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos x - b \sin x - 2e^x}{2} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0 - 2}{2} = \frac{a - 2}{2}$$

Se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\text{Luego, } 7 = \frac{a(1 - \cos x) + b \sin x - 2(e^x - 1)}{x^2} = \frac{a - 2}{2}; \text{ despejando, } a - 2 = 14. \text{ Luego, } a = 16$$

Conclusión: debe ser $a = 16, b = 2$

10.- (prueba extraordinaria) Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1 + ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

Resolución

$$f'(x) = \frac{2bx(1 + ax^4) - bx^2 \cdot 4ax^3}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx - 2abx^5}{(1 + ax^4)^2}$$

Al tener un punto crítico para $x = 1, f'(1) = 0$. Luego, $\frac{2b \cdot 1 - 2ab \cdot 1^5}{(1 + a \cdot 1^4)^2} = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1 - a) = 0$

Entonces, como $b > 0$ debe ser $a = 1$.

Como además la gráfica pasa por el punto $(1, 2)$, entonces $f(1) = 2$. Luego, $\frac{b \cdot 1^2}{1 + a \cdot 1^4} = 2 \Rightarrow b = 2 + 2a$.

Como $a = 1$, entonces $b = 2 + 2 \cdot 1, b = 4$

11.- (prueba extraordinaria) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \int_0^x t e^t dt$.

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

Como la función $g(t) = t e^t$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo integral la función f es derivable.

$$\text{Además, } f'(x) = (1)' + \left(\int_0^x t e^t dt \right)' = 0 + x e^x = x e^x ; f''(x) = 1 \cdot e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	cóncava	inflexión	convexa

Para $x = -1$, hay un punto de inflexión

$$f(-1) = 1 + \int_0^{-1} t e^t dt = 1 - \int_{-1}^0 t e^t dt. \text{ Sea } I = \int t e^t dt. \text{ Hallemos } I \text{ por el método de integración por}$$

partes con $u = t$ y $dv = e^t dt$. Tenemos que hallar $\int u dv$.

Derivando u e integrando v , se tiene: $t dt$; $v = e^t$

$$[u = t \quad dv = e^t] \Rightarrow I = \int u \, dv = uv - \int v \, du = te^t - \int e^t \, dt = te^t - e^t = e^t(t - 1)$$

Una primitiva es $p(t) = e^t(t - 1)$.

Por la regla de Barrow, $\int_{-1}^0 te^t \, dt = p(0) - p(-1) = e^0(0 - 1) - e^{-1}(-1 - 1) = -1 + \frac{2}{e}$

Luego, $f(-1) = 1 - \left(-1 + \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{2}{e} = \frac{2e-2}{e}$

El punto de inflexión es $I(-1, \frac{2e-2}{e})$

12.- (prueba extraordinaria) Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$).

Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$.

Resolución

El conjunto de todas las primitivas de f es $I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} \, dx$

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción: $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$

Luego, $I = \int 1 \, dx + \int \frac{2}{x^2-1} \, dx = x + \int \frac{2}{x^2-1} \, dx \stackrel{I_1}{\sim}$

Para calcular I_1 descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

Como $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, entonces $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

Multiplicando los dos miembros por $(x + 1)(x - 1)$, tenemos $2 = A(x - 1) + B(x + 1)$

- Para $x = 1$, sustituyendo, $2 = A(1 - 1) + B(1 + 1) \Rightarrow 2 = 2B$, de donde $B = 1$

- Para $x = -1$, sustituyendo, $2 = A(-1 - 1) + B(-1 + 1) \Rightarrow 2 = -2A$, de donde $A = -1$

$$I_1 = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1|$$

Luego, todas las primitivas de f son $F_k(x) = I = x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + k$, siendo $k \in \mathbb{R}$ una constante.

Si la primitiva pasa por $(2, 4)$, $F_k(2) = 4 \Rightarrow 2 - \ln|2+1| + \ln|2-1| + k = 4$

$2 - \ln 3 + 0 + k = 4$. Luego, $k = 2 + \ln 3$

Por tanto, la primitiva es $F(x) = x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + 2 + \ln 3$

13.- Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina a y b.

Resolución

Al ser derivable, en particular es derivable en $x = 0$.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Además, } \begin{cases} \text{Si } x < 0, & f'(x) = \frac{a(x-1) - (ax+b) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-a-b}{(x-1)^2} \\ \text{Si } x > 0, & f'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

$$\text{Luego, para } x \neq 0 \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-a-b}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Como debe ser continua en } x = 0: f(x) = f(x) \Rightarrow \frac{a \cdot 0 + b}{0 - 1} = \ln \ln(1 + 0) \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Como debe ser derivable en } x = 0, f'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{-a-b}{(0-1)^2} = \frac{1}{1+0} \Rightarrow -a-b = 1$$

Y como $b = 0$, se tiene que $a = -1$. Por tanto, debe ser $a = -1, b = 0$

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \ln \ln(1+x), & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y para } x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a-b}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{y la de la recta normal es } rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{En este caso, } x_0 = 2; \quad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \quad f(x_0) = f(2) = \ln \ln(1+2) = \ln \ln 3$$

$$\text{rtg: } y = \frac{1}{3}(x - 2) + \ln 3 \quad rn: y = -3(x - 2) + \ln \ln 3$$

14.- Halla a, b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \sin x + c \sin(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = b \cos x + 2c \cos(2x)$

Al tener un punto crítico para $x = \pi$, $f'(\pi) = 0$. Luego, $b \cos \pi + 2c \cos(2\pi) = 0 \Rightarrow -b + 2c = 0$

Como la pendiente de la recta normal en $x = 0$ es $-\frac{1}{2}$ entonces la pendiente de la recta tangente es 2, es decir $f'(0) = 2$. Luego, $b \cos 0 + 2c \cos 0 = 2 \Rightarrow b + 2c = 2$

Nos queda el sistema $\begin{cases} -b + 2c = 0 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$. Sumando las ecuaciones obtenemos $4c = 2$, de donde $c = \frac{1}{2}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación el valor $c = \frac{1}{2}$ se obtiene $b + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$, de donde $b = 1$.

Como además la gráfica y la recta normal coinciden en $x = 0$, entonces $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$.

Luego, $a + b \sin 0 + c \sin 0 = 3 \Rightarrow a = 3$

Conclusión: debe ser $a = 3$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$

15.- Considera la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f , así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

f es derivable en $(0, +\infty)$ y $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

El mínimo relativo se alcanza para $x = 1$, $y = f(1) = (\ln 1)^2 = 0$. El mínimo relativo es $M(1, 0)$

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

Resolución

Los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:

eje X: $y = (\ln \ln x)^2 = 0 \rightarrow x = 1$. La gráfica corta al eje X en el punto $(1, 0)$

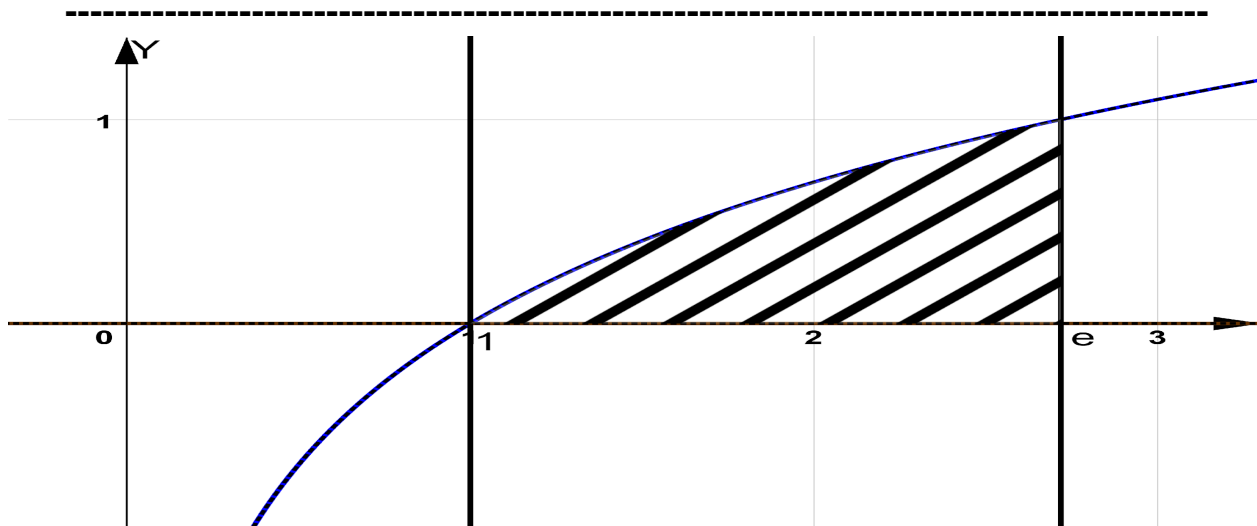
eje Y: $x = 0$, $y = f(0)$, que no existe. Luego, la gráfica no corta al eje Y

$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \ln x)^2 = +\infty$.

f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ cuya ecuación es A.V.: $x = 0$ (eje Y)

$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \ln x)^2 = +\infty$. No hay asíntota horizontal

La recta $y = 0$ es el eje X, la recta $x = 1$ es la vertical que pasa por $(1, 0)$ y la recta $x = e$ es la vertical que pasa por $(e, 0)$



El área que se pide es $A = \int_1^e (\ln \ln x)^2 dx$; $I = \int (\ln \ln x)^2 dx$.

Para hallar I usamos el método de integración por partes.

$$\left[u = (\ln \ln x)^2 \quad du = \frac{2 \ln \ln x}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow$$

$$I = uv - \int v du = x(\ln \ln x)^2 - 2 \int (\ln \ln x) dx \quad I_1$$

Para hallar I_1 volvemos a usar el método de integración por partes.

$$\left[u = \ln \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] \Rightarrow$$

$$I_1 = uv - \int v du = x \ln \ln x - \int 1 dx = x \ln \ln x - x = x(\ln \ln x - 1)$$

$$\text{Luego, } I = x(\ln \ln x)^2 - 2x(\ln \ln x - 1) + k = x[(\ln \ln x)^2 - 2 \ln \ln x + 2] + k$$

Una primitiva es $p(x) = x[(\ln \ln x)^2 - 2 \ln \ln x + 2]$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(e) - p(1) = e[(\ln \ln e)^2 - 2 \ln \ln e + 2] - 1[(\ln \ln 1)^2 - 2 \ln \ln 1 + 2] = e \cdot 1 - 1 \cdot 2 = (e - 2) u^2$$

$$16.- \text{Calcula } \int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{e^x}} dx. \text{ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable } t = \sqrt{e^x} \text{)}$$

Resolución

$$\text{Halleemos primero } I = \int \frac{1}{1 + \sqrt{e^x}} dx. \text{ Haciendo el cambio } t = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} \quad dt = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Luego, } dx = \frac{2 dt}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2 dt}{t}. \text{ Nos queda } I = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{2}{t} dt = \int \frac{2}{t(t+1)} dt$$

$$\text{Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: } \frac{2}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

$$\text{Multiplicando los dos miembros por } t(t+1), \text{ tenemos } 2 = A(t+1) + Bt$$

- Para $t = 0$, sustituyendo, $2 = A(0 + 1) + B \cdot 0 \Rightarrow 2 = A$

- Para $t = -1$, sustituyendo, $2 = A(-1 + 1) + B \cdot (-1) \Rightarrow 2 = -B$, de donde $B = -2$

$$I = \int \left(\frac{2}{t} + \frac{-2}{t+1} \right) dt = 2 \ln |t| - 2 \ln |t+1| + k = 2 \ln \ln e^{\frac{x}{2}} - (e^{\frac{x}{2}} + 1) + k = x - 2 \ln \ln (e^{\frac{x}{2}} + 1)$$

Luego, $p(x) = x - 2 \ln \ln (e^{\frac{x}{2}} + 1)$, es una primitiva. Por la regla de Barrow,

$$\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{e^x}} dx = p(2) - p(0) = 2 - \left(e^{\frac{2}{2}} + 1 \right) - \left[0 - \left(e^{\frac{0}{2}} + 1 \right) \right] = 2 - 2 \ln \ln (e + 1) + 2 \ln 2$$

17.- Sea la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}, & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b + \sin(\pi x), & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \text{ Determina } a \text{ y } b.$$

Resolución

Como f es continua, en particular es continua en $x = 0$:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = 4 \cdot 0^2 + a = a$$

$$\text{Luego, } a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \frac{\ln(e^0 + 0^3)}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{\frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}}{1} = \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = \frac{e^0 + 3 \cdot 0^2}{e^0 + 0^3} = 1. \text{ Se puede aplicar.}$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = 1 \text{ y, en consecuencia, } a = 1$$

Como f es continua, en particular es continua en $x = 1$:

$$\Rightarrow 4 \cdot 1^2 + a = b + \sin(\pi \cdot 1) \Rightarrow 4 + a = b. \text{ Y como } a = 1, \text{ se tiene que } b = 5$$

Conclusión: debe ser $a = 1$, $b = 5$

18.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

Como $e^{2x+1} + 1 > 0$ f es continua. Luego no hay asíntotas verticales

$$\text{Estudiemos las asíntotas en } +\infty: f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación.}$$

$$\text{Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital: } \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

Se puede aplicar. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1$. Luego, f tiene asíntota horizontal en $+\infty$, A.H: $y = 1$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Estudiemos las asíntotas en $-\infty$: $f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación.

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital: $\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$

Se puede aplicar. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1$. Luego, f tiene asíntota horizontal en $-\infty$, A.H: $y = 1$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - 1 = \frac{e^{2x} - 1 - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{-2}{e^{2x} + 1} < 0$$

Luego, la gráfica está "por debajo" de la asíntota en $\pm\infty$

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\text{Además, } f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0.$$

Luego, f es creciente en $\mathbb{R}$

19.- Calcula $\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x - \cos^2 x) dx$

Resolución

Sea

$$I = \int (2\sin^2 x - \cos^2 x) dx = \int [2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)] dx = \int (3\sin^2 x - 1) dx = 3 \int \sin^2 x dx \overset{I_1}{=} -x$$

Halleamos I_1 por el método de integración por partes:

$$[u = \sin x \quad v = \cos x \quad du = \cos x dx \quad dv = -\sin x dx]$$

$$I_1 = \int u dv = uv - \int v du = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_1 = -\sin x \cos x + x - I_1 \Rightarrow 2I_1 = -\sin x \cos x + x \Rightarrow I_1 = \frac{-\sin x \cos x + x}{2}$$

$$\text{Luego, } I = 3 \cdot \frac{-\sin x \cos x + x}{2} - x + k = \frac{3x - 3\sin x \cos x - 2x}{2} + k = \frac{x - 3\sin x \cos x}{2} + k$$

Una primitiva es

$$p(x) = \frac{x - 3\sin x \cos x}{2} \quad \text{como } \sin(2x) = 2\sin x \cos x \rightarrow \frac{x - \frac{3\sin(2x)}{2}}{2} = \frac{2x - 3\sin(2x)}{4}.$$

Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x - \cos^2 x) dx = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} - 3 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{4} - \frac{2 \cdot 0 - 3 \sin 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

20.- Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

Resolución

Los puntos de corte de las gráficas son las soluciones del sistema

$$\{y = f(x) \text{ y } y = g(x) \Rightarrow \{y = |x| - 2 \text{ y } y = 4 - x^2$$

$$|x| - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow |x| = 6 - x^2 \Rightarrow \{x \geq 0, x = 6 - x^2 \text{ } x < 0, -x = 6 - x^2$$

$$x \geq 0, x = 6 - x^2 \Rightarrow x \geq 0, x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}, x = 2 \Rightarrow y = |2| - 2 = 0. \text{ Punto } P(2, 0) \text{ y } x = -3 \text{ (no se considera)}$$

$$x < 0, -x = 6 - x^2 \Rightarrow x < 0, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}, x = -2 \Rightarrow y = |-2| - 2 = 0. \text{ Punto } Q(-2, 0)$$

f es continua por ser resta de dos funciones continuas. Además,

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{si } x < 0 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

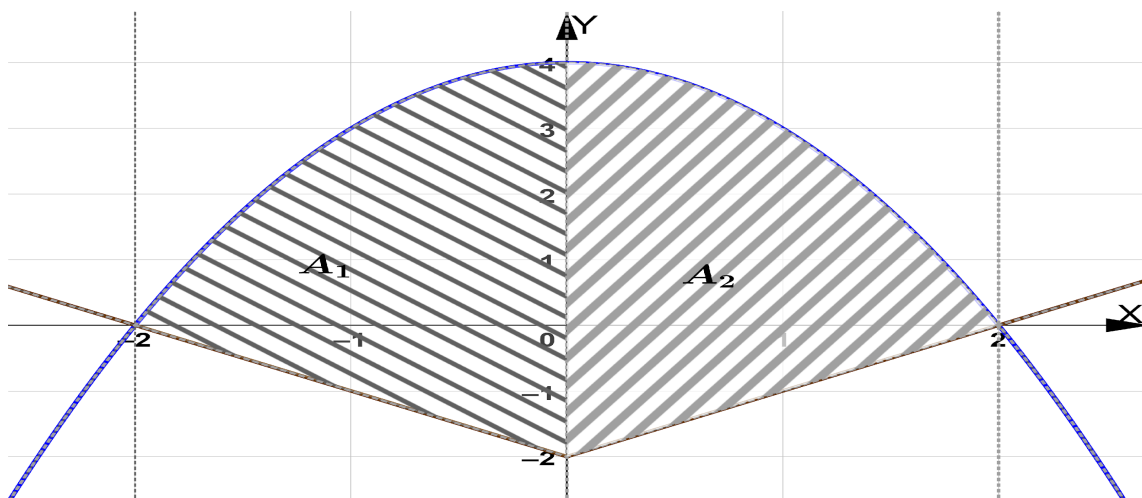
Para $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Luego, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$ con lo que tiene un mínimo en $x = 0, y = f(0) = |0| - 2 = -2$. El mínimo es $M(0, -2)$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty; \quad f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2) = -\infty$$

Por otra parte, g es derivable por ser una función cuadrática. Además, $g'(x) = -2x$.

Luego, g es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$ con lo que tiene un máximo en $x = 0, y = g(0) = 4 - 0^2 = 4$.

El máximo de g es $V(0, 4)$, vértice de la parábola. Por otra parte, $g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4 - x^2) = -\infty$



b) Determina el área del recinto anterior.

Resolución

$$\text{Por simetría, } A_1 = A_2; \quad A_2 = \int_0^2 [4 - x^2 - (x - 2)] dx = \int_0^2 (-x^2 - x + 6) dx.$$

Halleamos A_2 : Como $\int (-x^2 - x + 6) dx = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + k = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 36x}{6} + k$,

una primitiva es $p(x) = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 36x}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = p(2) - p(0) = \frac{-2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2}{6} - \frac{-2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0}{6} = \frac{44}{6} - 0 = \frac{22}{3} u^2$

El área que se pide es $A = A_1 + A_2 = 2A_2 = 2 \frac{22}{3} = \frac{44}{3} u^2$

21.- (prueba ordinaria) Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

Resolución

- La asíntota oblicua es AO: $y = mx + n$. Como la pendiente es 2:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}}{x} = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - x} = \frac{ax^2}{x^2} = a.$$

Luego, $a = 2$ y AO: $y = 2x + n$

- Como la asíntota pasa por el punto $(1, 1)$, entonces $1 = 2 \cdot 1 + n$. Luego $n = -1$.

$$[f(x) - 2x] = \left(\frac{2x^2 + bx + 2}{x - 1} - 2x \right) \cdot \frac{2x^2 + bx + 2 - 2x(x - 1)}{x - 1} =$$

$$\frac{bx + 2x + 2}{x - 1} \cdot \frac{(b + 2)x + 2}{x - 1} = b + 2. \text{ Obtenemos, } -1 = b + 2. \text{ Luego, } b = -3, a = 2.$$

22.- (prueba ordinaria) Considera la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$\text{por } f(x) = \begin{cases} (3x - 6)e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin x - ax)}{x^3}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a .

Resolución

Como f es continua, en particular es continua en $x = 0$:

$$= \Rightarrow (3 \cdot 0 - 6) \cdot e^0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(\sin x - ax)}{x^3}$$

$$\text{Luego, } -6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} = \frac{36(\sin 0 - a \cdot 0)}{0^3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{36(\cos x - a)}{3x^2} = \frac{36(\cos 0 - a)}{3 \cdot 0^2} = \frac{36(1 - a)}{0}. \text{ Se puede aplicar.}$$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser -6 , entonces debe ser $1 - a = 0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $a = 1$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Resolución

$$\text{En un entorno de } x = -1, f(x) = (3x - 6)e^x, f'(x) = 3e^x + (3x - 6)e^x = e^x(3 + 3x - 6) = e^x(3x - 3)$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

$$\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En este caso, $x_0 = -1$, $f'(x_0) = f'(-1) = e^{-1}[3(-1) - 3] = \frac{-6}{e}$,

$$f(x_0) = f(-1) = [3(-1) - 6]e^{-1} = \frac{-9}{e}$$

$$rtg: y = \frac{-6}{e}(x + 1) - \frac{9}{e} \rightarrow rtg: y = \frac{-6x - 6 - 9}{e} \rightarrow rtg: y = \frac{-6x - 15}{e}$$

23.- (prueba ordinaria) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

f es derivable por ser una función polinómica; $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	creciente		creciente	máximo	decreciente

f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Resolución

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4) = -\infty$. Como f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$, en $x = 3$ hay un

máximo, $y = f(3) = 4 \cdot 3^3 - 3^4 = 27$. El mínimo es $M(3, 27)$

$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 12x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

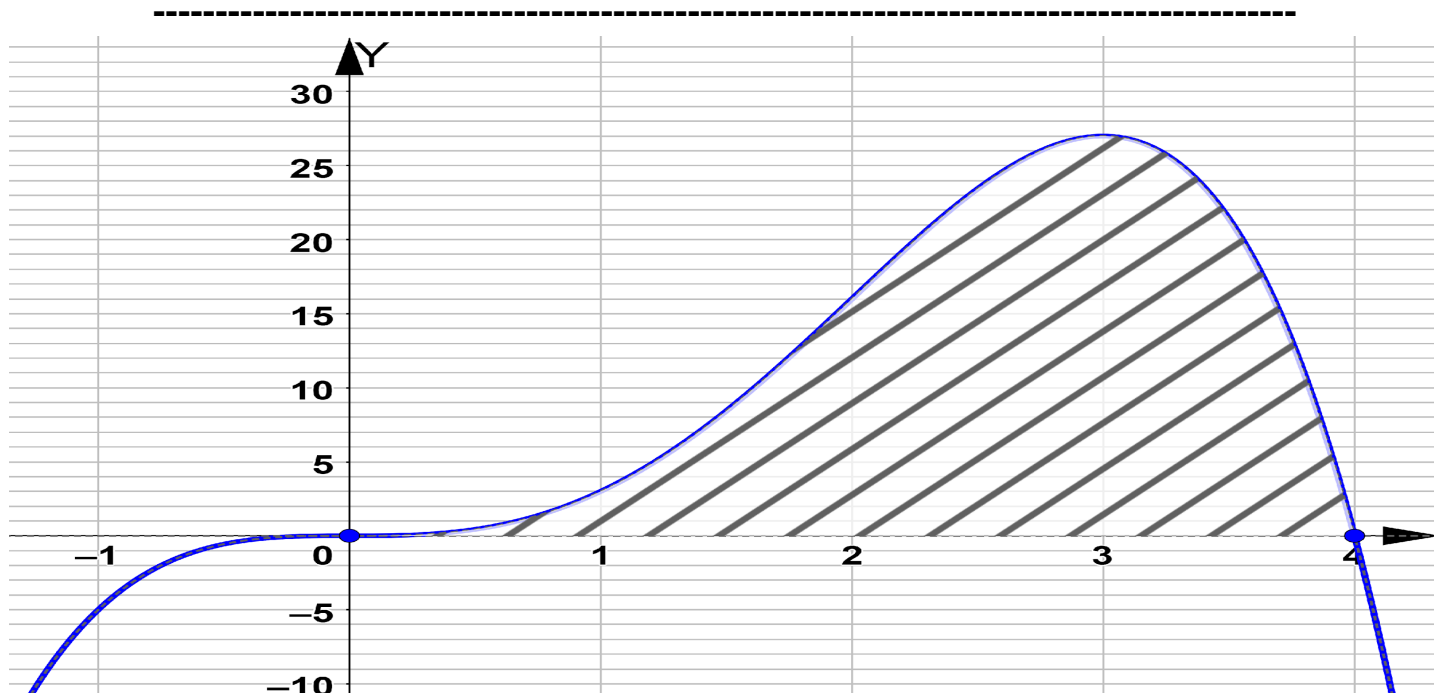
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	cóncava	inflexión	convexa	inflexión	cóncava

Los puntos de inflexión son: $x = 0, y = f(0) = 0$, $I_1(0, 0)$ y $x = 2, y = f(2) = 4 \cdot 2^3 - 2^4 = 16$, $I_2(2, 16)$

Los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:

eje X: $f(x) = 4x^3 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 4$. Los puntos son $(0, 0)$ y $(4, 0)$

eje Y: $x = 0, y = f(0) = 0$. Punto $(0, 0)$



El área que se pide es $A = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx$.

Como $\int (4x^3 - x^4) dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + k = x^4 - \frac{x^5}{5} + k = \frac{5x^4 - x^5}{5} + k$, una primitiva es $p(x) = \frac{5x^4 - x^5}{5}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(4) - p(0) = \frac{5 \cdot 4^4 - 4^5}{5} - \frac{5 \cdot 0^4 - 0^5}{5} = \frac{256}{5} - 0 = \frac{256}{5}$

24.- (prueba ordinaria) Considera la función $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$.
Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

Como la función $f(t) = 2t + \sqrt{t}$ es continua por el teorema fundamental del cálculo la función F es derivable. Además, $F'(x) = \left(\int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt \right)' = 2x + \sqrt{x}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función F en x_0 es rtg: $y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$.

En este caso, $x_0 = 1$; $F'(x_0) = F'(1) = 2 \cdot 1 + \sqrt{1} = 3$; $F(x_0) = F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t}) dt$

Como $\int (2t + \sqrt{t}) dt = \int (2t + t^{1/2}) dt = \frac{2t^2}{2} + \frac{t^{3/2}}{3/2} + k = t^2 + \frac{2t^{3/2}}{3} + k = \frac{3t^2 + 2\sqrt{t^3}}{3} + k$, una primitiva es $p(t) = \frac{3t^2 + 2\sqrt{t^3}}{3}$.

Por la regla de Barrow, $F(x_0) = p(1) - p(0) = \frac{3 \cdot 1^2 + 2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{0^3}}{3} = \frac{5}{3}$

$$rtg: y = 3(x - 1) + \frac{5}{3} \rightarrow rtg: y = 3x - \frac{4}{3}$$