

1.- Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0,90 € y cada revista a 1,20 €?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

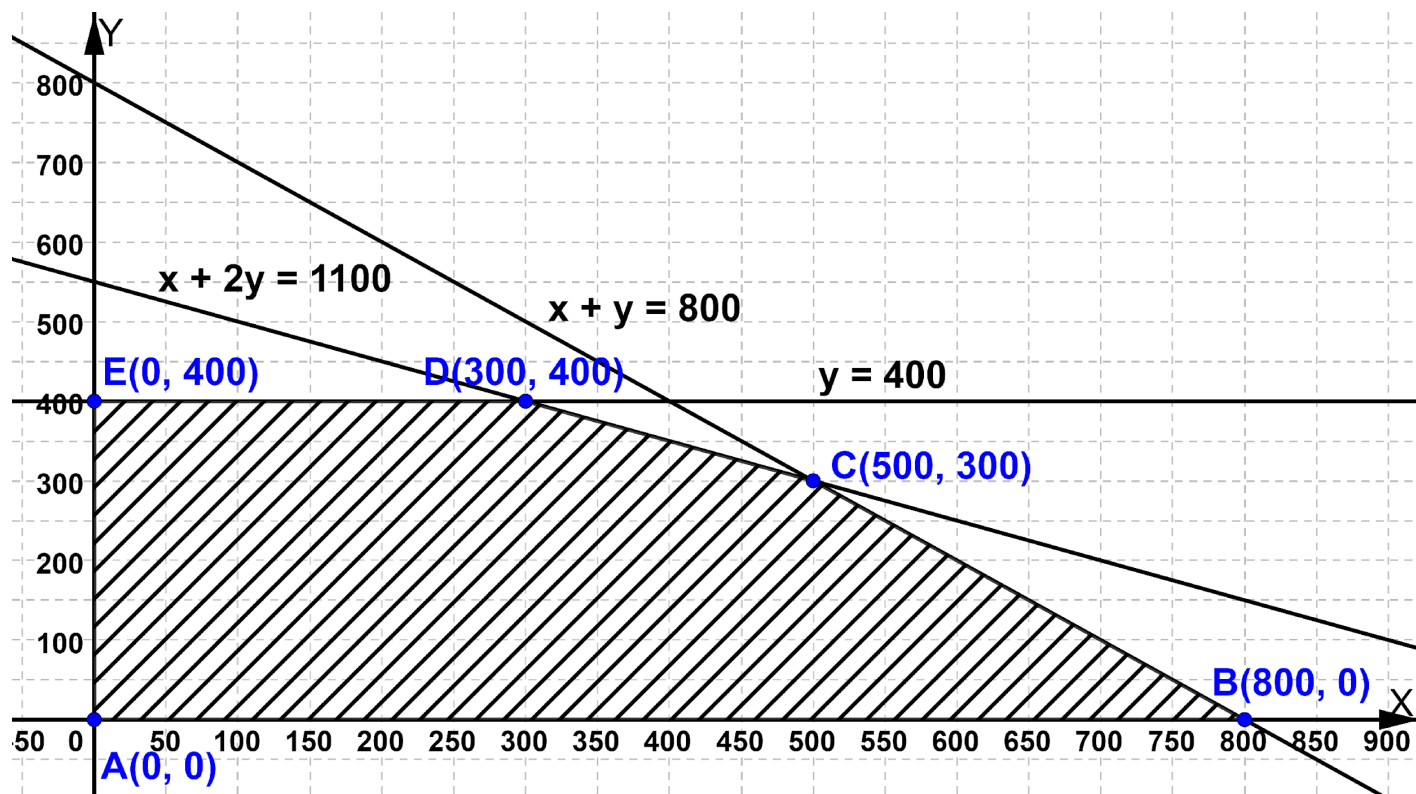
	nº de unidades	nº de cartuchos de negro	nº de cartuchos de color	ingresos (en €)
periódicos	x	1x	1x	0,90x
revistas	y	1y	2y	1,20y
total	x + y	x + y	x + 2y	0,9x + 1,2y

Las restricciones son $\{x + y \leq 800, x + 2y \leq 1100, y \leq 400, x \geq 0, y \geq 0\}$. La función a optimizar (maximizar) es $f(x, y) = 0,9x + 1,2y$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + y \leq 800 \rightarrow \text{Recta: } x + y = 800$ $x = 0, \quad 0 + y = 800, \quad y = 800$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>800</td></tr><tr><td>y</td><td>800</td><td>0</td></tr></table> $y = 0, \quad x + 0 = 800, \quad x = 800$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 800 \quad (\text{cierto}).$ La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	800	y	800	0	$x + 2y \leq 1100 \rightarrow \text{Recta: } x + 2y = 1100$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1100</td></tr><tr><td>y</td><td>550</td><td>0</td></tr></table> $x = 0, \quad 0 + 2y = 1100, \quad y = 550$ $y = 0, \quad x + 2 \cdot 0 = 1100, \quad x = 1100$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 1100 \quad (\text{cierto}).$ La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	1100	y	550	0
x	0	800											
y	800	0											
x	0	1100											
y	550	0											
$y \leq 400 \rightarrow \text{Recta: } y = 400, \text{ horizontal que pasa por } (0, 400).$ $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 400 \quad (\text{cierto}).$ La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	$x \geq 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{eje Y})$ $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0 \quad (\text{cierto}).$ La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. $y \geq 0 \rightarrow y = 0 \quad (\text{eje X})$ $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0 \quad (\text{cierto}).$ La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.												

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$$\{x = 0, y = 0 \rightarrow A(0, 0)\} \quad \{x + y = 800, y = 0; x + 0 = 800, x = 800 \rightarrow B(800, 0)\}$$

$$\{x + y = 800, x + 2y = 1100; \text{restando}, y = 300; x + 300 = 800, x = 500 \rightarrow C(500, 300)\}$$

$$\{x + 2y = 1100, y = 400; x + 2 \cdot 400 = 1100, x = 300 \rightarrow D(300, 400)\} \quad \{x = 0, y = 400 \rightarrow E(0, 400)\}$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 0,9x + 1,2y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 0,9 \cdot 0 + 1,2 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(800, 0) = 0,9 \cdot 800 + 1,2 \cdot 0 = 720$$

$$f(C) = f(500, 300) = 0,9 \cdot 500 + 1,2 \cdot 300 = 810 \quad f(D) = f(300, 400) = 0,9 \cdot 300 + 1,2 \cdot 400 = 750$$

$$f(E) = f(0, 400) = 0,9 \cdot 0 + 1,2 \cdot 400 = 480$$

Los ingresos máximos son de 810 € y se alcanzan editando 500 periódicos y 300 revistas.

2.- (prueba extraordinaria)

a) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3(y - 3), \quad 2x + 3y \leq 36, \quad x \leq 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

b) Calcule los vértices del recinto.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3(y - 3) \rightarrow -x + 3y \leq 9 \rightarrow \text{Recta: } -x + 3y = 9$$

x	0	-9
y	3	0

$$x = 0, \quad 0 + 3y = 9, \quad y = 3$$

$$y = 0, \quad -x + 3 \cdot 0 = 9, \quad x = -9$$

$$(0, 0) \rightarrow 0 + 3 \cdot 0 \leq 9 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene

$$2x + 3y \leq 36 \rightarrow \text{Recta: } 2x + 3y = 36$$

x	0	18
y	12	0

$$x = 0, \quad 2 \cdot 0 + 3y = 36, \quad y = 12$$

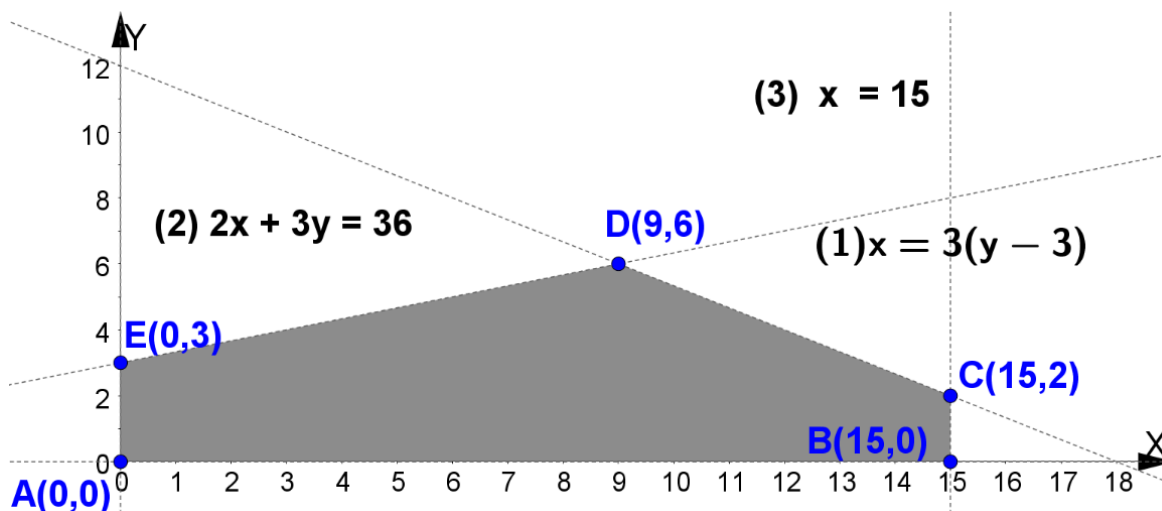
$$y = 0, \quad 2x + 3 \cdot 0 = 36, \quad x = 18$$

$$(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 36 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene

al (0, 0).	al (0, 0).
$x \leq 15 \rightarrow$ Recta: $x = 15$, vertical que pasa por (15, 0). $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 15$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) ; $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0). $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) ; $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$$\{x = 0, y = 0 \rightarrow A(0, 0)\} \quad \{x = 15, y = 0 \rightarrow B(15, 0)\}$$

$$\{2x + 3y = 36, x = 15 \rightarrow 2 \cdot 15 + 3y = 36, y = 2 \rightarrow C(15, 2)\}$$

$$\{-x + 3y = 9, 2x + 3y = 36; \text{restando}, 3x = 27, x = 9; -9 + 3y = 9, y = 6 \rightarrow D(9, 6)\}$$

$$\{-x + 3y = 9, x = 0; 0 + 3y = 9, y = 3 \rightarrow E(0, 3)\}$$

c) Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = 8x + 12y$ en este recinto e indique dónde se alcanza.

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $F(x, y) = 8x + 12y$:

$$F(A) = F(0, 0) = 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0 \quad F(B) = F(15, 0) = 8 \cdot 15 + 12 \cdot 0 = 120$$

$$F(C) = F(15, 2) = 8 \cdot 15 + 12 \cdot 2 = 144 \quad F(D) = F(9, 6) = 8 \cdot 9 + 12 \cdot 6 = 144$$

$$F(E) = F(0, 3) = 8 \cdot 0 + 12 \cdot 3 = 36$$

El máximo es 144 y se alcanza en el segmento cerrado CD

3.- (prueba ordinaria)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x \geq 0; y \geq 0; -x + 2y \leq 6; x + y \leq 6; x \leq 4$$

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$-x + 2y \leq 6 \rightarrow \text{Recta: } -x + 2y = 6$$

x	0	-
y	3	0

$$x = 0, \quad 0 + 2y = 6, \quad y = 3$$

$$y = 0, \quad -x + 2 \cdot 0 = 6, \quad x = -6$$

$$(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 6 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$$x + y \leq 6 \rightarrow \text{Recta: } x + y = 6$$

x	0	6
y	6	0

$$x = 0, \quad 0 + y = 6, \quad y = 6$$

$$y = 0, \quad x + 0 = 6, \quad x = 6$$

$$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 6 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$$x \leq 4 \rightarrow \text{Recta: } x = 4, \text{ vertical que pasa por } (4, 0).$$

$$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 4 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

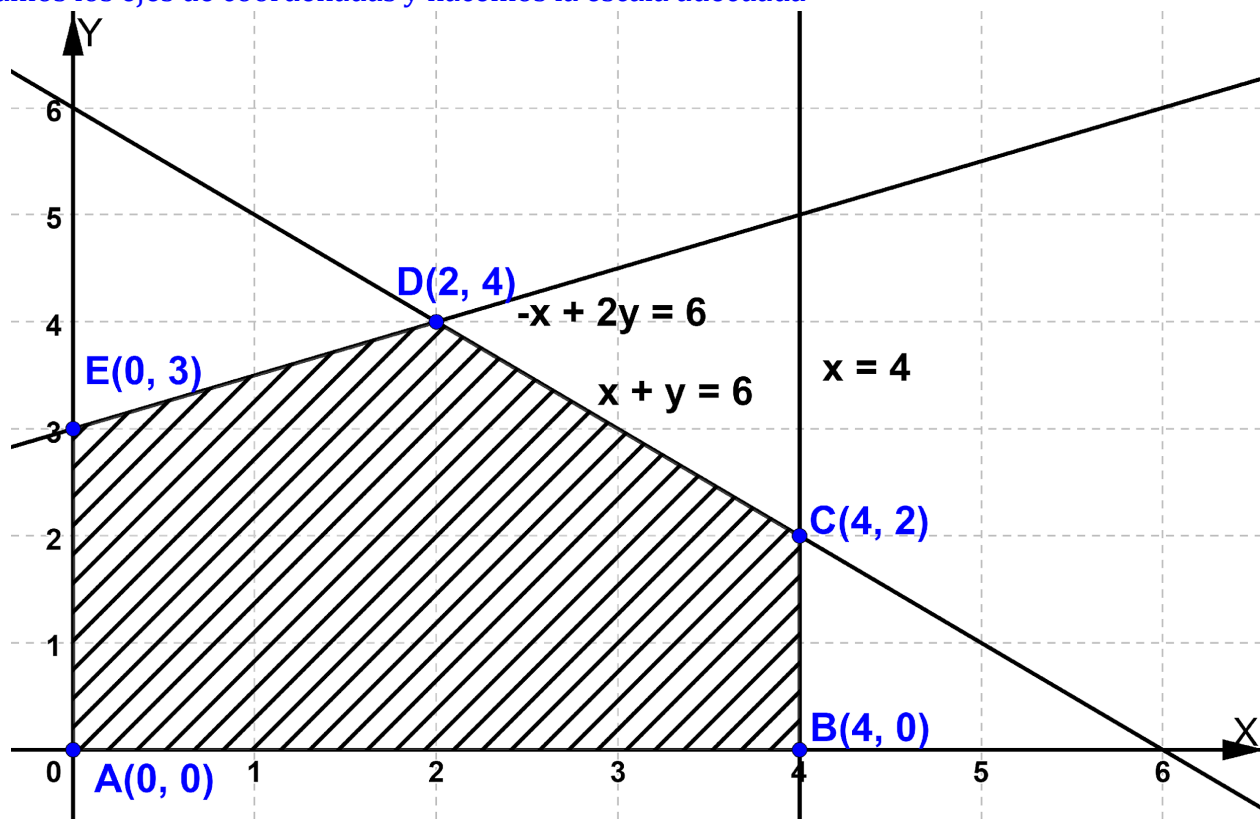
$$x \geq 0 \rightarrow x = 0 \text{ (eje Y)} ; (1, 0) \rightarrow 1 \geq 0 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$$y \geq 0 \rightarrow y = 0 \text{ (eje X)} ; (0, 1) \rightarrow 1 \geq 0 \quad (\text{cierto}).$$

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$$\{x = 0, y = 0 \rightarrow A(0, 0)\}$$

$$\{x = 4, y = 0 \rightarrow B(4, 0)\}$$

$$\{x + y = 6, x = 4; 4 + y = 6, y = 2 \rightarrow C(4, 2)\}$$

$$\{-x + 2y = 6, x + y = 6; \text{sumando, } 3y = 12, y = 4; x + 4 = 6, x = 2 \rightarrow D(2, 4)\}$$

$$\{-x + 2y = 6, x = 0; 0 + 2y = 6, y = 3 \rightarrow E(0, 3)$$

b) Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $F(x, y) = 2x + 2y + 1$:

$$F(A) = F(0, 0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad F(B) = F(4, 0) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 = 9$$

$$F(C) = F(4, 2) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 13 \quad F(D) = F(2, 4) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 = 13$$

$$F(E) = F(0, 3) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

El valor máximo es 13 y se alcanza en el segmento cerrado CD

4.- Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados, A y B, a razón de 40 y 20 € el kg, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 kg, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dichos ingresos máximos.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg	ingresos (en €)
preparados tipo A	x	40x
preparados tipo B	y	20y
total	x + y	40x + 20y

Las restricciones son $\{x \leq 1000, y \leq 1000, x + y \leq 1700, x \geq 0, y \geq 0\}$. La función a optimizar (maximizar) es $f(x, y) = 40x + 20y$

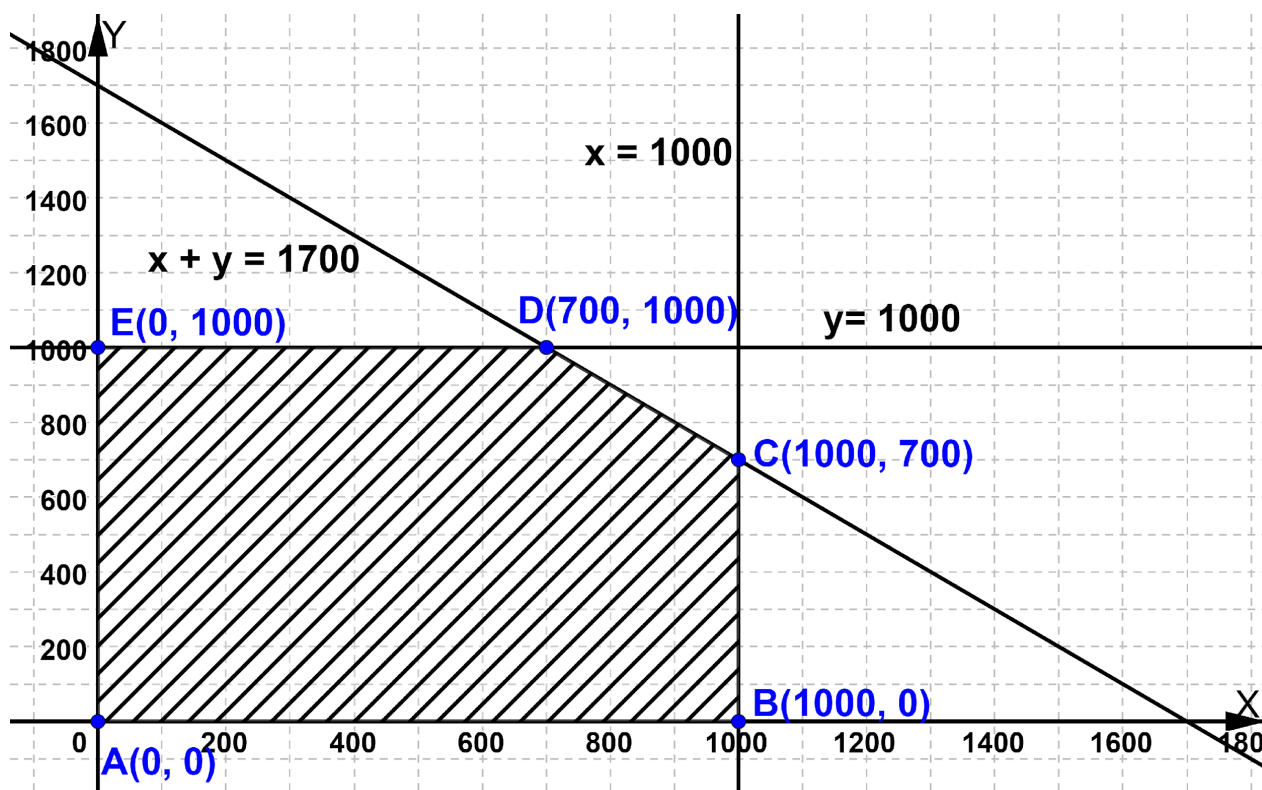
Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + y \leq 1700 \rightarrow$ Recta: $x + y = 1700$ $x = 0, 0 + y = 1700, y = 1700$ <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>1700</td></tr> <tr> <td>y</td><td>1700</td><td>0</td></tr> </table> $y = 0, x + 0 = 1700, x = 1700$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 1700$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).		x	0	1700	y	1700	0	$x \leq 1000 \rightarrow$ Recta: $y = 1000$, vertical que pasa por (1000, 0). $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 1000$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).
x	0	1700						
y	1700	0						
$y \leq 1000 \rightarrow$ Recta: $y = 1000$, horizontal que pasa por (0, 1000). $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 1000$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).						

contiene al $(0, 0)$.

La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$$\{x = 0, y = 0 \rightarrow A(0, 0); \{x = 1000, y = 0 \rightarrow B(1000, 0);$$

$$\{x + y = 1700, x = 1000; 1000 + y = 1700, y = 700 \rightarrow C(1000, 700)$$

$$\{x + y = 1700, y = 1000; x + 1000 = 1700, x = 700 \rightarrow D(700, 1000) \quad \{y = 1000, x = 0 \rightarrow E(0, 1000)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 40x + 20y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(1000, 0) = 40 \cdot 1000 + 20 \cdot 0 = 40000$$

$$f(C) = f(1000, 700) = 40 \cdot 1000 + 20 \cdot 700 = 54000 \quad f(D) = f(700, 1000) = 40 \cdot 700 + 20 \cdot 1000 = 48000$$

$$f(E) = f(0, 1000) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 1000 = 20000$$

Los ingresos máximos son 54000 € y se alcanzan vendiendo 1000 preparados de tipo A y 700 de tipo B.

5.- Sea la región definida por las siguientes inecuaciones: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1$, $-x + 2y \geq 0$, $y \leq 2$

a) Represente gráficamente dicha región y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$-x + 2y \geq 0 \rightarrow \text{Recta: } -x + 2y = 0$$

x	0	2
y	0	1

$$x = 0, \quad 0 + 2y = 0, \quad y = 0$$

$$y = 1, \quad -x + 2 \cdot 1 = 0, \quad x = 2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 1 \rightarrow 3x + 2y \geq 6 \rightarrow \text{Recta: } 3x + 2y = 6$$

x	0	2
y	3	0

$$x = 0, \quad 3 \cdot 0 + 2y = 6, \quad y = 3$$

$$y = 0, \quad 3x + 2 \cdot 0 = 6, \quad x = 2$$

$(0, 0) \rightarrow -x + 2y \geq 0$ (falso).

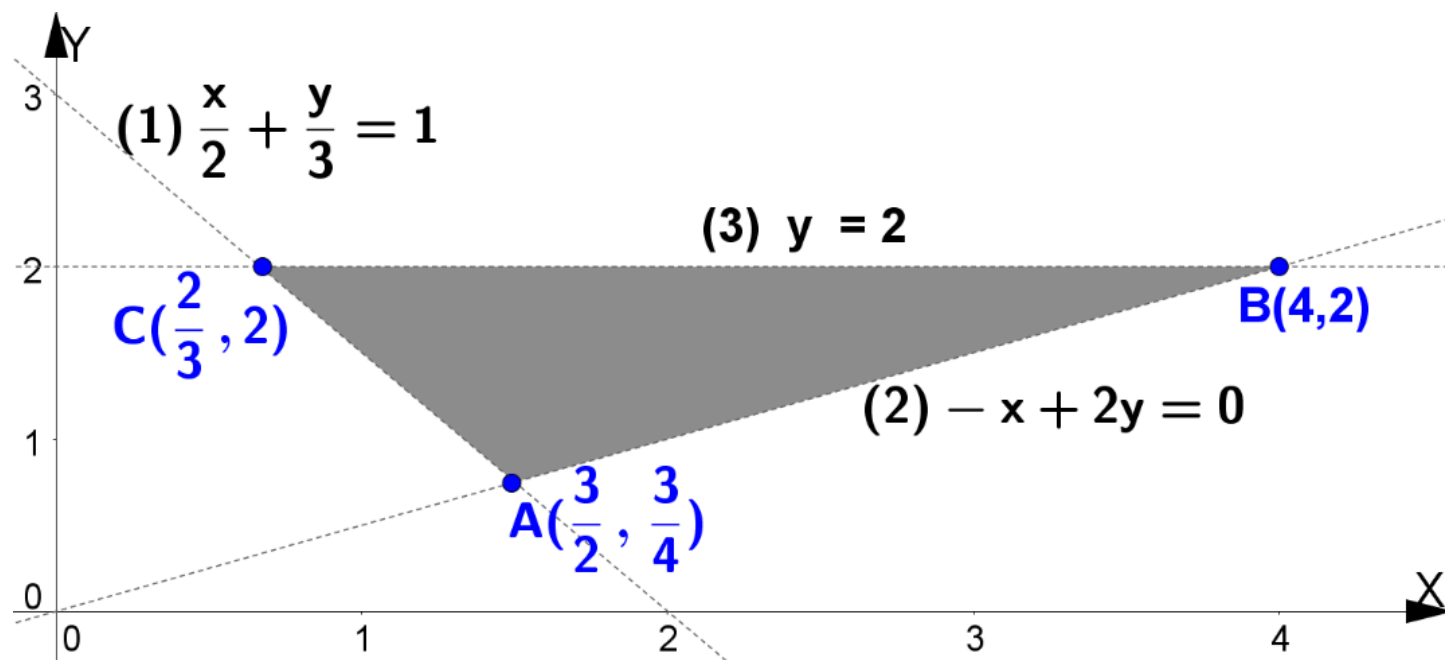
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al $(0, 0)$.

$(0, 0) \rightarrow 3x + 2y \geq 6$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

$y \leq 2 \rightarrow$ Recta: $y = 2$, horizontal que pasa por $(0, 2)$; $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 2$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$$\{-x + 2y = 0 \quad 3x + 2y = 6; \text{ restando, } 4x = 6, \quad x = \frac{3}{2} \quad ; \quad -\frac{3}{2} + 2y = 0, \quad y = \frac{3}{4} \rightarrow A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\{-x + 2y = 0 \quad y = 2; -x + 2 \cdot 2 = 0, \quad x = 4 \rightarrow B(4, 2) \quad \{3x + 2y = 6 \quad y = 2; 3x + 2 \cdot 2 = 6, \quad x = \frac{2}{3} \rightarrow C\left(\frac{2}{3}, 2\right)$$

b) Determine en qué puntos la función $F(x, y) = 3x - 6y + 4$ alcanza sus valores extremos y cuáles son éstos.

Resolución

$$F(A) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4 = 4 \quad F(B) = F(4, 2) = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 4 = 4$$

$$F(C) = F\left(\frac{2}{3}, 2\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot 2 + 4 = -6$$

El valor máximo es 4 y se alcanza en el segmento cerrado AB

El valor mínimo es -6 y se alcanza en $C\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

6.- Se considera el recinto definido por las inecuaciones $y - x \leq 4$, $x - y \leq 4$, $x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

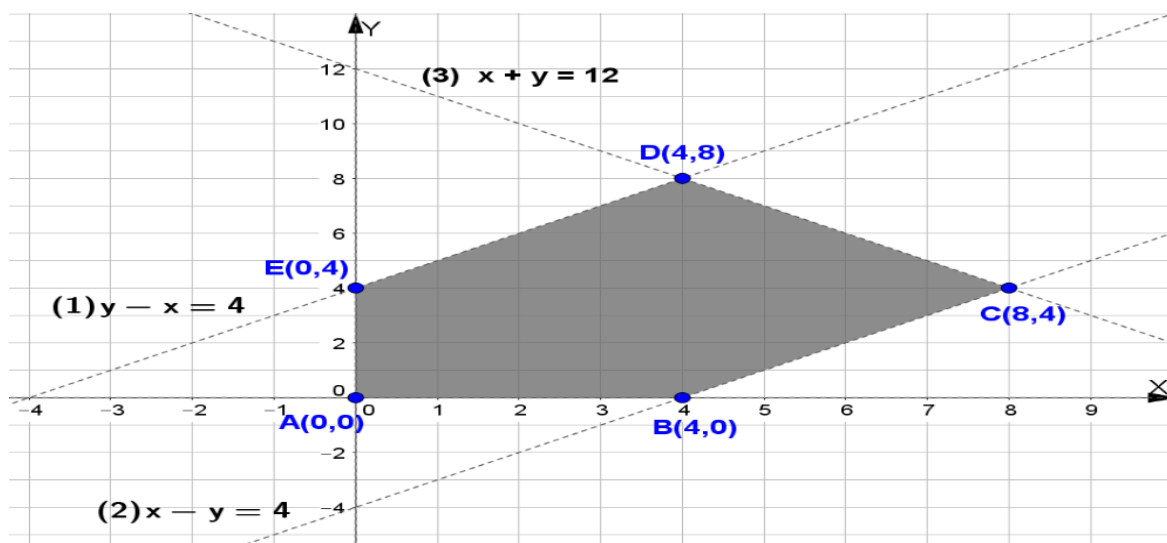
a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$y - x \leq 4 \rightarrow \text{Recta: } y - x = 4$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>0</td></tr></table> $x = 0, \quad y - 0 = 4, \quad y = 4$ $y = 0, \quad 0 - x = 4, \quad x = -4$ $(0, 0) \rightarrow 0 - 0 \leq 4$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	-	y	4	0	$x - y \leq 4 \rightarrow \text{Recta: } x - y = 4$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-</td><td>0</td></tr></table> $x = 0, \quad 0 - y = 4, \quad y = -4$ $y = 0, \quad x - 0 = 4, \quad x = 4$ $(0, 0) \rightarrow 0 - 0 \leq 4$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	4	y	-	0
x	0	-											
y	4	0											
x	0	4											
y	-	0											
$x + y \leq 12 \rightarrow \text{Recta: } x + y = 12$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>12</td></tr><tr><td>y</td><td>12</td><td>0</td></tr></table> $x = 0, \quad 0 + y = 12, \quad y = 12$ $y = 0, \quad x + 0 = 12, \quad x = 12$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 12$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	12	y	12	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) ; $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) ; $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.						
x	0	12											
y	12	0											

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\{x = 0, y = 0 \rightarrow A(0, 0)\}$; $\{x - y = 4, y = 0 \rightarrow B(4, 0)\}$;

$\{x - y = 4, x + y = 12 ; 2x = 16, x = 8 ; 8 + y = 12, y = 4 \rightarrow C(8, 4)\}$

$$\{x + y = 12 \quad y - x = 4; 2y = 16, y = 8; \quad x + 8 = 12, x = 4 \rightarrow D(4, 8)$$

$$\{y - x = 4 \quad x = 0; y - 0 = 4, y = 4 \rightarrow E(0, 4)$$

b) Dada la función objetivo $F(x, y) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$ determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos del recinto donde se alcanzan.

Resolución

$$F(A) = F(0, 0) = \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \quad F(B) = F(4, 0) = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{4}{5} \cdot 0 = \frac{8}{3}$$

$$F(C) = F(8, 4) = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{32}{15}$$

$$F(D) = F(4, 8) = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{-56}{15} \quad F(E) = F(0, 4) = \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{-16}{5}$$

El valor máximo es $\frac{8}{3} \cong 2,7$ y se alcanza en B(4, 0) y el mínimo $\frac{-56}{15} \cong -3,7$ y se alcanza en D(4, 8)