Chapitre 3
Nombres complexes et trigonométrie

I. Rappels sur la forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriété 1

$\forall\theta\in R, e^{i\theta} = \cos\cos\theta + i\sin\sin\theta$

Propriété 2

Soient des réels θ et θ', et n un entier naturel non nul,

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

II. Formules de Moivre et d'Euler

Formule de Moivre

Soient $\theta, \theta' \in R$. Soit $n\in N^*$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Soit encore

$$(\cos\cos\theta + i\sin\sin\theta)^n = \cos\cos(n\theta) + i\sin\sin(n\theta)$$

Méthode

Appliquer la formule de Moivre

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik**

Exprimer $\cos\cos(3x)$ en fonction de $\cos\cos x$ et $\sin\sin(3x)$ en fonction de $\sin\sin x$.

Solution

Soit $x\in R$, d'après la formule du binôme de Newton,

$(\cos\cos x + i\sin\sin x)^3 = x + x\sin\sin x + 3i^2\cos\cos x\,x + i^3x = x + x\sin\sin x - 3\cos\cos x\,x - ix = x$

D'après la formule de Moivre,

$$\cos\cos(3x) + i\sin\sin(3x) = (\cos\cos x + i\sin\sin x)^3$$

On en déduit que

$$\cos\cos(3x) = 4x - 3\cos\cos x$$
$$\sin\sin(3x) = 3\sin\sin x - 4x$$

Formules d'Euler

Soient $\theta, \theta' \in R$,

$$\cos\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \sin\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

On utilisera notamment ces formules pour **linéariser** des expressions trigonométriques : ceci consistera à **supprimer les puissances** dans cette expression.

Méthode

Appliquer les formules d'Euler

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/p6TncUjPKfQ**

a. Linéariser l'expression$x$.

b. En déduire une primitive de la fonction $x\longmapsto x$.

Solution

a. Soit $x\in R$. On applique une formule d'Euler et la formule du binôme de Newton pour développer

$x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3\right) = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} +\right.$

b. Chercher une primitive de la fonction $x\longmapsto x$ revient à chercher une primitive de la fonction

$$x\longmapsto\frac{1}{4}(\cos\cos 3x + x)$$

Ainsi, la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\left(\sin \frac{1}{3} sin\ 3x\ +\ x\right) = \sin \frac{1}{12} sin\ 3x\ +\ \sin \frac{3}{4} sin\ x$$

est une primitive de la fonction $x \longmapsto x$

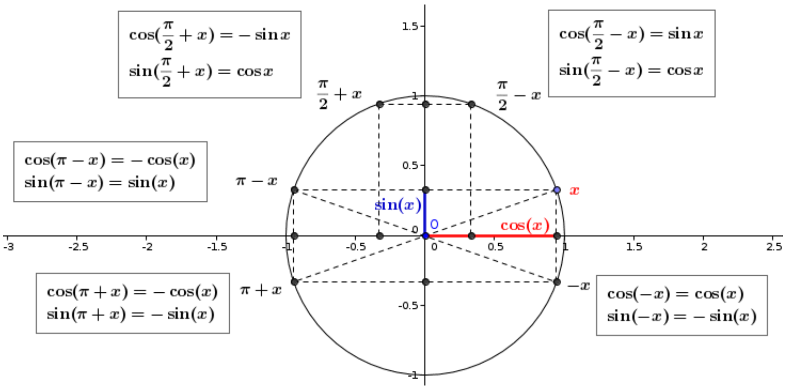
III. Application à la trigonométrie

1. Rappels

Propriété 3

Soit $x \in R$,

- $-\ 1 \leq cos\ x \leq 1$
- $-\ 1 \leq sin\ x \leq 1$
- $cos^2\ x\ +\ sin^2\ x\ =\ 1$



Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	**0**	$\frac{}{6}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{3}$	$\frac{}{2}$	
$Cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\ 1$
$Sin\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2. Formules d'addition

Propriété 4

Soit a et b deux nombres réels quelconques.

$\cos cos\ (a\ -\ b)\ =\ \cos cos\ a\ \times\ \cos cos\ b\ +\ \sin s$

Preuve

Soient $a, b \in R$, d'après la formule d'Euler,

$$e^{i(a-b)} = e^{ia}e^{-ib} = (\cos cos\ a\ +\ i \sin sin\ a\ )(\cos cos\ (-\ b)\ +\ i \sin sin\ (-\ b)\ )$$

La fonction cosinus étant paire et la fonction sinus étant impaire, on obtient

$e^{i(a-b)} = (\cos cos\ a\ +\ i \sin sin\ a\ )(\cos cos\ b\ -\ i \sin sin\ b\ )e^{i(a-b)} = \cos cos\ a\ \times\ \cos cos\ b\ +\ \sin sin\ a\ \times\ \sin sin\ b\ +$

Or, d'après la propriété 1,

$$e^{i(a-b)} = \cos cos\ (a\ -\ b)\ +\ i \sin sin\ (a\ -\ b)$$

Donc, en identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\cos cos\ (a\ -\ b)\ =\ \cos cos\ a\ \times\ \cos cos\ b\ +\ \sin sin\ a\ \times\ \sin sin\ b$$

$$\sin sin\ (a\ -\ b)\ =\ \sin sin\ a\ \cos cos\ b\ -\ \cos cos\ a\ \sin sin\ b$$

Les autres formules se retrouvent en remplaçant b par $-\ b$ dans les formules précédentes et en utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus.

Remarque

Ces dernières formules permettent de trouver les formules d'addition et de soustraction de deux cosinus ou de deux sinus. En effet, si l'on soustrait membre à membre les deux premières formules, on obtient

$$\cos cos\ (a\ +\ b)\ -\ \cos cos\ (a\ -\ b)\ =-\ 2 \sin sin\ a\ \sin sin\ b$$

Posons alors $x\ =\ a\ +\ b$ et $y\ =\ a\ -\ b$

En additionnant membre à membre, on remarque que

$$x\ +\ y\ =\ 2a \Leftrightarrow a\ = \frac{x+y}{2}$$

De la même façon, en soustrayant membre à membre, on obtient

$$x\ -\ y\ =\ 2b \Leftrightarrow b\ = \frac{x-y}{2}$$

L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$$\cos cos\ x\ -\ \cos cos\ y\ =-\ 2 \sin sin\ \left(\frac{x+y}{2}\right)\ \sin sin\ \left(\frac{x-y}{2}\right)$$

De la même manière, on trouve les formules suivantes

$$\cos \cos x \ + \cos \cos y \ = 2 \cos \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) \ \cos \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin \sin x \ - \sin \sin y \ = 2 \cos \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) \ \sin \sin \left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin \sin x \ + \sin \sin y \ = 2 \sin \sin \left(\frac{x+y}{2}\right) \ \cos \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$$

La première formule nous servira pour calculer la dérivée de cosinus.

Méthode

Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/WcTWAazcXds**

Calculer $\cos \cos \left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin \sin \left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Solution

$\cos \cos \left(\frac{5\pi}{12}\right) \ = \cos \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \ = \cos \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \ \cos \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) \ - \sin \sin \left(\frac{\pi}{4}\right) \ \sin \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} =$

$\sin \sin \left(\frac{5\pi}{12}\right) \ = \sin \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \ = \sin \sin \left(\frac{\pi}{4}\right) \ \cos \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) \ + \cos \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \ \sin \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} =$

3. Formules de duplication

Propriété 5

Soit $a \in R$,

$\cos \cos (2a) \ = a \ - a \ \cos \cos (2a) \ = 2a \ - 1 \ \cos \cos (2a$

Preuve

On peut appliquer les 2e et 4e formules d'addition en posant $a \ = b$

$$\cos \cos (2a) = a \ - a$$
$$\sin \sin (2a) = 2 \cos \cos a \ \sin \sin a$$

Remarquons également que $a \ + a \ = 1$

donc

$$a \ - a \ = a \ - (1 - a) = 2a \ - 1$$

Et

$$a \ - a \ = 1 - a \ - a \ = 1 - a$$

Corollaire 1

Soit $a \in R$,

$$a \ = \frac{1+\cos\cos(2a)}{2} \ a \ = \frac{1-\cos\cos(2a)}{2}$$

Méthode

Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/RPtAUl3oLco**

Calculer $\cos \cos \left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin \sin \left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution

$\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) \ = 2\left(\frac{\pi}{8}\right) \ - 1$

Donc

$\left(\frac{\pi}{8}\right) \ = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et donc, $\cos \cos \left(\frac{\pi}{8}\right)$ étant positif,

$\cos \cos \left(\frac{\pi}{8}\right) \ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

et donc, sin $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ étant positif,

sin $sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Méthode

Résoudre une équation trigonométrique

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/yx3yULqR_wI**

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\cos cos\,(2x) = \sin sin\,x$

Solution

Soit $x\in[0; 2\pi]$, d'après une formule de duplication,

$$\cos cos\,(2x) = \sin sin\,x \Leftrightarrow 1 - 2x = \sin sin\,x$$

On pose

$$X = \sin sin\,x$$

l'équation s'écrit alors

$$1 - 2X^2 = X \Leftrightarrow 2X^2 + X - 1 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 4\times2\times(-1) = 9$

L'équation du second degré possède deux solutions réelles distinctes X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \qquad et \qquad X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

Résolvons alors dans $[0 ; 2\pi]$ les équations

$$\sin sin\,x = \frac{1}{2}\ et\ \sin sin\,x = -1$$

$\sin sin\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}\ ou\ x = \frac{5\pi}{6}$

$\sin sin\,x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

On en déduit que

$S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2}\right\}$

Remarque

Si l'on avait résolu cette équation dans R, il aurait fallu rajouter toutes les valeurs modulo 2π aux valeurs trouvées. On aurait alors

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2}\right\} + 2\pi Z$$

Soient A et B deux ensembles. $x\in A + B$ s'il existe $a\in A$ et $b\in B$ tel que $x = a + b$

Application au calcul intégral

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\pi/4} a\,da\ et\ J = \int_{\pi/6}^{\pi/4} a\,da$$

Solution

$I = \int_0^{\pi/4} a\,da = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos cos\,(2a)}{2}da = \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\sin sin\,(2a)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

D'après la méthode pages 1 et 2,

$J = \int_{\pi/6}^{\pi/4} a\,da = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{4}\cos cos\,(3a) + \cos\frac{3}{4}cos\,a\,da = \left[\sin\frac{1}{12}sin\,(3a) + \sin\frac{3}{4}sin\,a\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{12} - \frac{3}{8} = 10\surd$

Autre méthode

Par linéarité,

$J = \int_{\pi/6}^{\pi/4} a\,da = \int_{\pi/6}^{\pi/4} a\ \cos cos\,a\,da = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - a)\cos cos\,a\,da = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos cos\,a\,da - \int_{\pi/6}^{\pi/4} a\ \cos cos\,a\,da$

$J = [\sin sin\,a]_{\pi/6}^{\pi/4} - \left[\frac{1}{3}a\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{24} = \frac{10\sqrt{2}-11}{24}$

Remarque

La deuxième méthode n'est pas adaptée à des puissances supérieures à 3.