

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây:

a. $\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{3}$;

b. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$;

c. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

a. Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -1 và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.

c. Với (d) vừa tìm được, tìm tọa độ giao điểm còn lại của (d) và (P) .

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*); với m là tham số.

a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có nghiệm.

b. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Câu 4. (2,0 điểm)

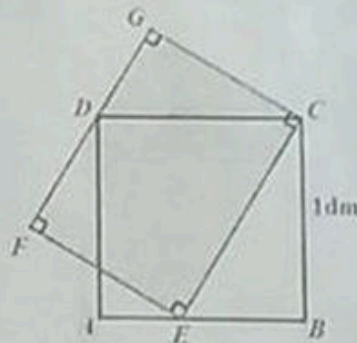
Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ các đường cao $AA'; BB'; CC'$ cắt nhau tại H .

a. Chứng minh rằng tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp.

b. Kéo dài AA' cắt đường tròn (O) tại điểm D . Chứng minh rằng tam giác CDH cân.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $ABCD$ là hình vuông có cạnh 1dm. Trên cạnh AB lấy một điểm E . Đặt hình chữ nhật $CEFG$ sao cho điểm D nằm trên cạnh FG . Tính diện tích hình chữ nhật $CEFG$. (hình vẽ bên)



-----Hết-----

Đáp án tham khảo:

Câu 1 (3,0 điểm)

Cách giải:

Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây:

a. $\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Ta có: $\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} : \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b.
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 9 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + 3 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (4; 3)$

c. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Ta có:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 (VN) \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2; x = 2$.

Câu 2 (2 điểm)

Cách giải:

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

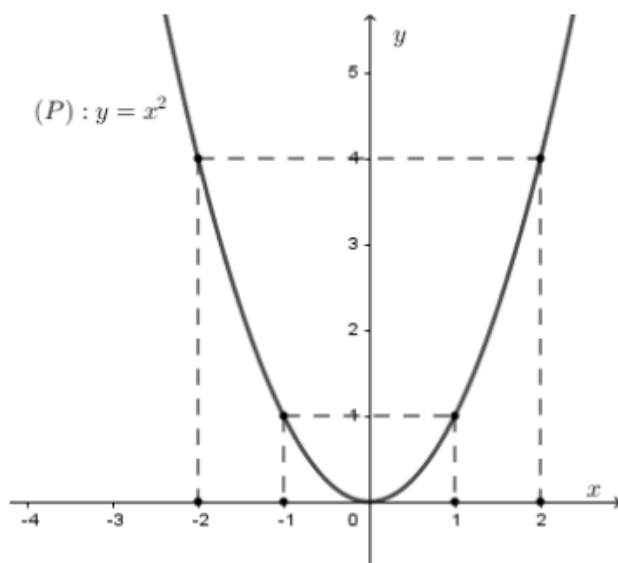
a. Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) đi qua các điểm $(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)$

Hình vẽ:



b. Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -1 và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 1 .

Gọi phương trình đường thẳng $(d): y = ax + b$

Vì đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -1 nên $a = -1$

Suy ra $(d): y = -x + b$

Gọi giao điểm của (d) và parabol (P) là $M(1; y)$

Vì $M(1; y) \in (P)$ nên $y = x^2 = 1^2 = 1$, suy ra $M(1; 1)$

Lại có $M(1; 1) \in (d)$ nên $1 = -1 + b \Leftrightarrow b = 2$

Vậy phương trình đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

c. Với (d) vừa tìm được, tìm tọa độ giao điểm còn lại của (d) và (P)

Theo câu b) ta có: $(d): y = -x + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) , ta được:

$$x^2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Với $x=1 \Rightarrow y=1^2=1$

Với $x=-2 \Rightarrow y=(-2)^2=4$

Vậy tọa độ giao điểm còn lại của (d) và (P) là: $(-2; 4)$

Câu 3 (2 điểm)

Cách giải:

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*), với m là tham số

a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có nghiệm

Xét phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*) có:

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (m-1) = 2 - m$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 (ld) \\ 2-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$

Vậy với $m \leq 2$ thì phương trình (*) có nghiệm

b. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Theo câu a) với $m \leq 2$ thì phương trình (*) có nghiệm x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Xét $A = x_1^3 + x_2^3$

$$= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 - (3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2)$$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$= 2^3 - 3(m-1) \cdot 2$$

$$= 8 - 6(m-1)$$

$$= 8 - 6m + 6$$

$$= 14 - 6m$$

$$\text{Vậy } A = 14 - 6m$$

$$\text{Vì } m \leq 2 \text{ nên ta có: } 6m \leq 12 \Leftrightarrow 14 - 6m \geq 14 - 12 \Leftrightarrow 14 - 6m \geq 2$$

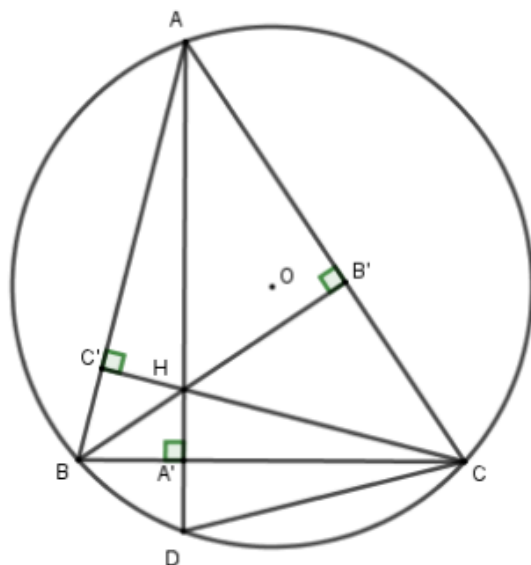
Dấu “=” xảy ra khi $m = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $2 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau tại H .



a) Chứng minh rằng tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có:

$$BB' \perp AC \Rightarrow \angle AB'H = 90^\circ$$

$$CC' \perp AB \Rightarrow \angle AC'H = 90^\circ$$

Tứ giác $AB'HC'$ có:

$$\angle AB'H + \angle AC'H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng } 180^\circ) \text{ (đpcm)}$$

b) Kéo dài AA' cắt đường tròn (O) tại điểm D . Chứng minh rằng tam giác CDH cân.

Ta có:

$$\angle BAA' + \angle ABA' = 90^\circ$$

$$\angle BCC' + \angle ABA' = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAA' = \angle BCC'$$

Lại có $\angle BAA' = \angle BCD$ (cùng chắn cung BD)

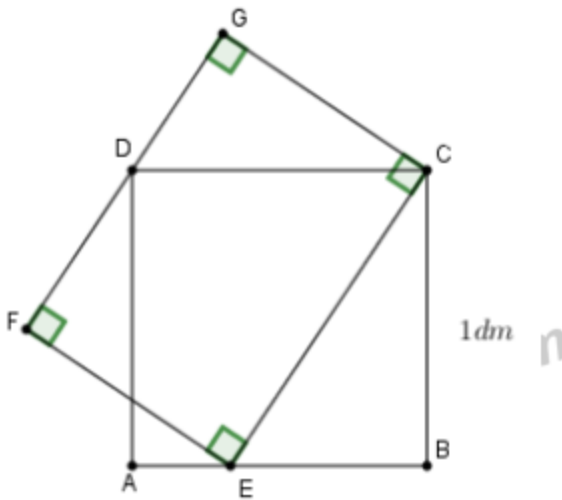
$$\Rightarrow \angle BCC' = \angle BCD (= \angle BAA')$$

Xét tam giác CDH có CA' vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên là tam giác cân (đpcm).

Câu 5 (1,0 điểm)

Cách giải:

Cho $ABCD$ là hình vuông có cạnh $1dm$. Trên cạnh AB lấy một điểm E . Dụng hình chữ nhật $CEFG$ sao cho điểm D nằm trên cạnh FG . Tính diện tích hình chữ nhật $CEFG$ (hình vẽ bên).



Ta có: $\angle DCG = \angle BEC$ (cùng phụ với $\angle DCE$)

Xét $\triangle DCG$ và $\triangle ECB$ có:

$$\angle G = \angle B = 90^\circ$$

$$\angle DCG = \angle BEC \text{ (cmf)}$$

Suy ra $\triangle DCG \sim \triangle ECB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{EC} = \frac{CG}{BC}$$

$$\Rightarrow EC \cdot CG = DC \cdot BC = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Suy ra } S_{CEFG} = EC \cdot CG = 1dm^2$$