2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

ΘΕΜΑ Β

1. (**23197**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

2. (**25761**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x+1=x$. (Μονάδες 12)

3. (**25764**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\geq 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o=0$. (Μονάδες 12)

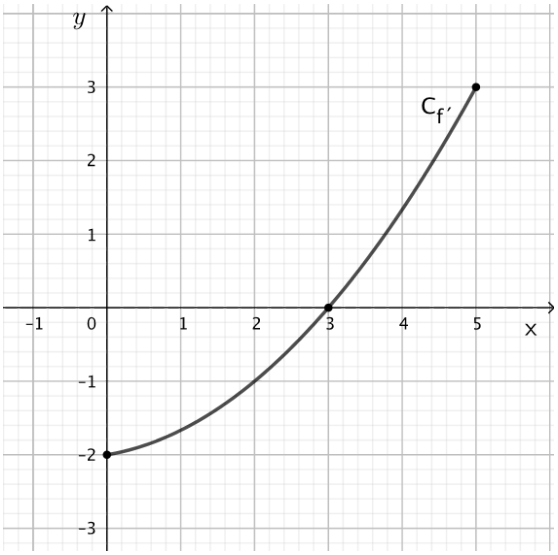
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

4. (**26707**) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o=3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)

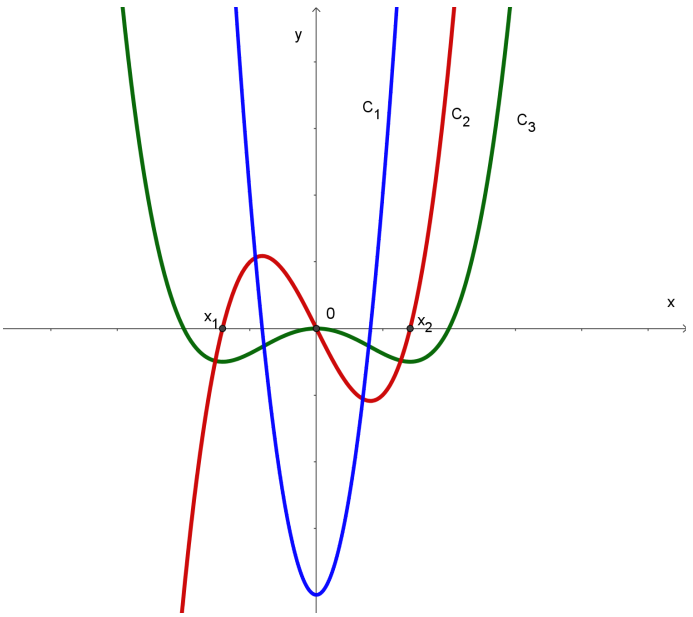


5. (**32390**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0, 2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

6. (**32694**) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f και F, όπου F μία αρχική της f στο . Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,



α) (i) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F. (Μονάδες 10)

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F \not\equiv f$		0	0	0	
F					

(ii) να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F. (Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f και F. (Μονάδες 07)

7. (**34025**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$.

α) (i) Να δείξετε ότι $f'(x)<0$ με $x\in(1,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

(ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) (i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 9)

8. (**34026**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-2\ln x$, $x>0$.

α) Να βρείτε: (i) Την μονοτονία της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

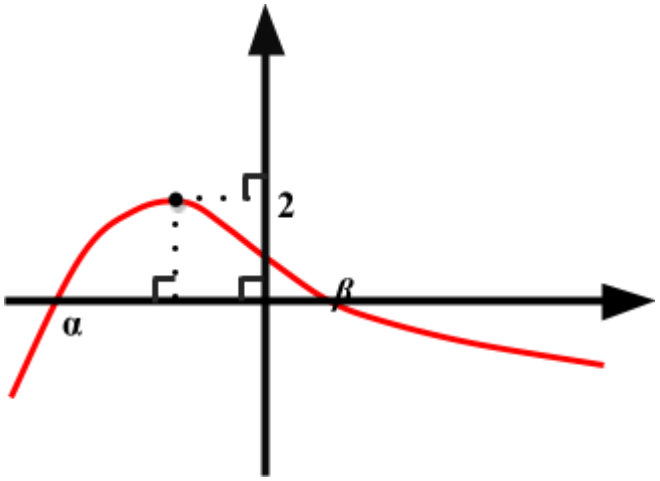
(ii) Το πρόσημο της f. (Μονάδες 7)

β) (i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x>0$,έχει μέγιστη τιμή την $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2e}$. (Μονάδες 7)

(ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

9. (**23210**) Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $f(x) = +\infty$, $f(x) = -\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\leq 2$. (Μονάδες 8)

10. (**23215**) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$. (Μονάδες 5)

γ) (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

(ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

(Μονάδες 6)

11. (**23311**) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x, τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1\ m/sec$.

(Μονάδες 05)

12. (**24587**) Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$, με τύπο $f(x) = 2 \ln ln\, x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - lnx_0)$. (Μονάδες 05)

β) (i) Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

13. (**26633**) Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

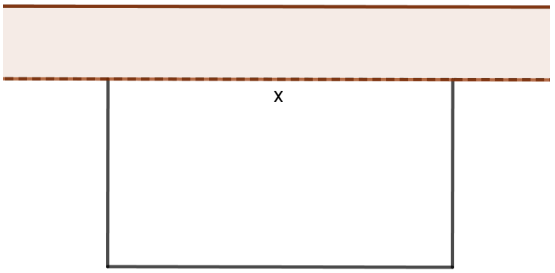
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{με} \quad 0 < x < 400 .$$ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής. (Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



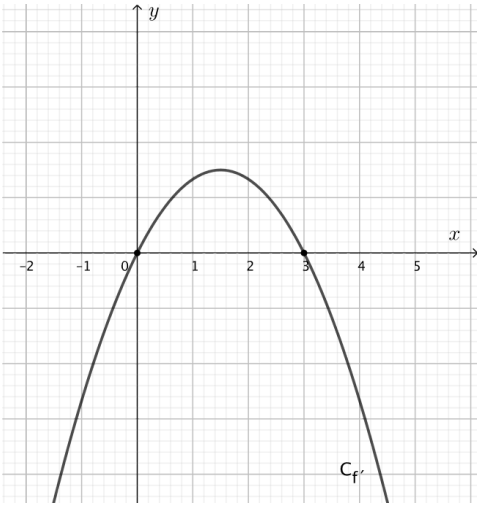
14. (**27092**) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(0, -1)$ και $\mathrm{B}(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f. (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f. (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in R$, στο διάστημα $(0, 3)$. (Μονάδες 07)

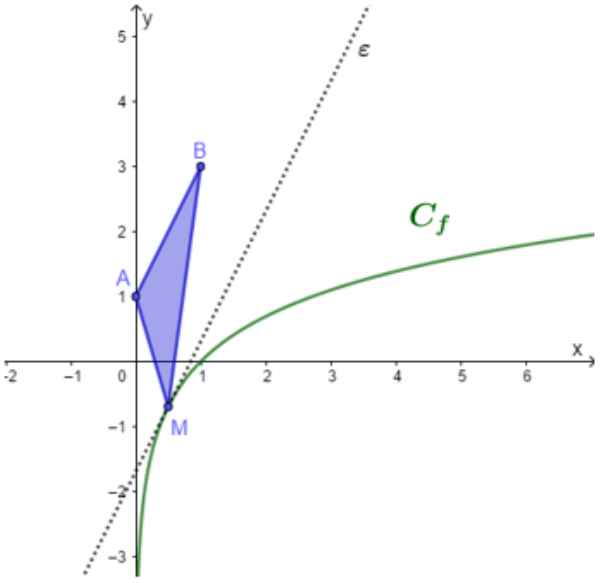


15. (**27650**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx,\ x > 0$ και τα σημεία Α$(0, 1)$ και Β$(1, 3)$.

α) (i) Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.(Μονάδες 06)

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx),\ x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ, όπου Μ ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο Μ ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)



γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α. (Μονάδες 07)

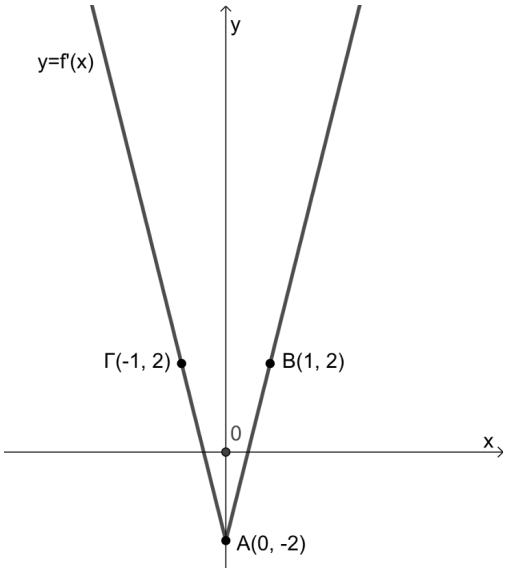
16. (**28337**) Έστω $f : R \to R$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο Α$(0\,,\ -2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο Β$(1\,,\ 2)$ και η άλλη από το Γ$(-\ 1\,,\ 2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

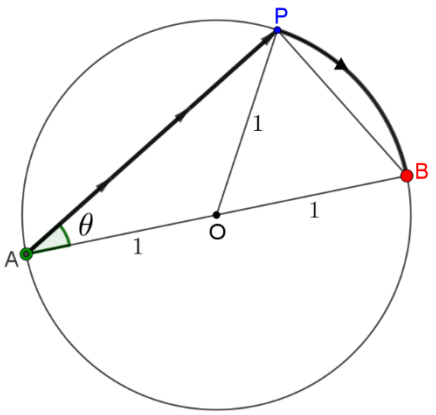
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f.
(Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.
(Μονάδες 7)



17. (**28532**) Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η ΑΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΡ έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου ΡΒ με ταχύτητα 6 Km/h.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\hat{PAB}$ είναι θ rad.



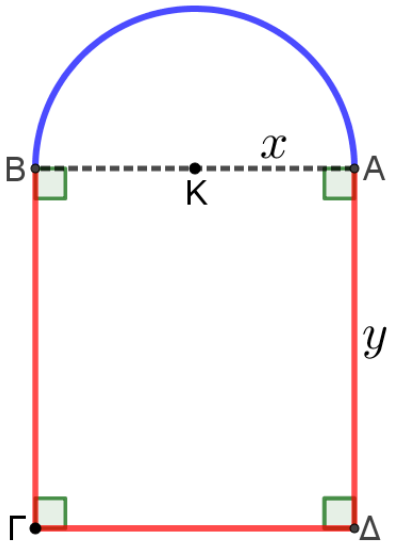
α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2συνθ$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta) = \frac{1}{3} \bullet (2συνθ + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

18. (**28534**) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\,m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(\text{ΑΚ}) = x\,m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(\text{ΑΔ}) = y\,m$. Ονομάζουμε $\text{Ε}(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \bullet x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E\left(x_0\right)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\frac{ln(E(x))}{E(x)-E\left(x_0\right)}$. (Μονάδες 8)

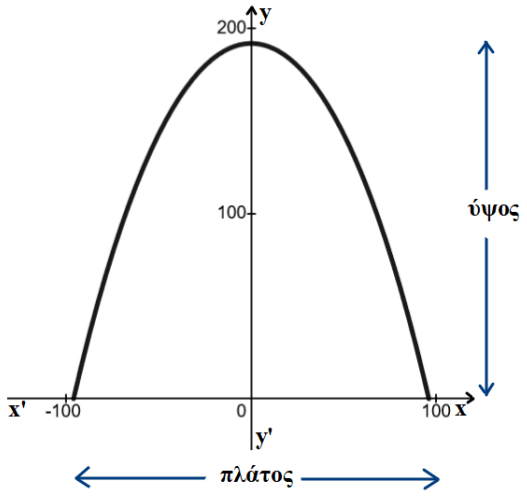
19. (**29149**) Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96] \to \mathbf{R}$ με $g(x) = e^{\frac{x}{96}} + e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha > 0$ και $f(x) = 2\alpha\left[g(96) - g(x)\right]$, $x \in [-96,96]$ τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-96,96)$. (Μονάδες 06)

(ii) Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



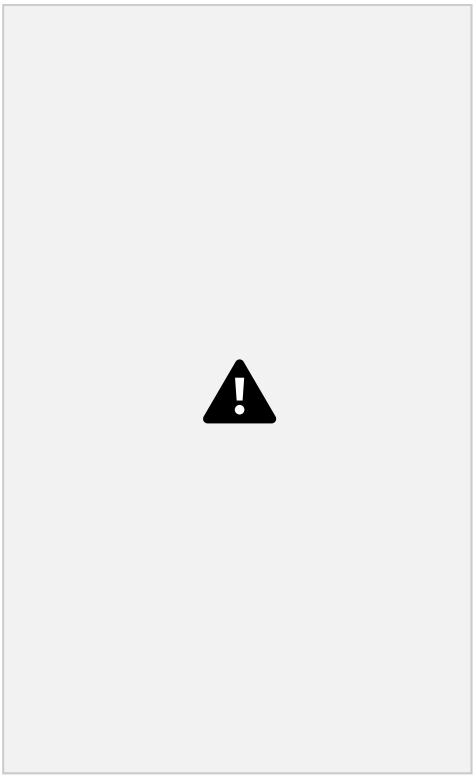
20. (**29644**) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x, x \in [-3, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

(ii) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$.
(Μονάδες 10)



21. (**33596**) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Α, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο Μ (i) είναι κάθετη στην ΑΜ. (Μονάδες 6)

(ii) τέμνει τον άξονα $\acute{x}x$ στο σημείο $(x_o^3-x_o,0)$.

(Μονάδες 7)

22. (**33642**) Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

(i) $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

(ii) $f(x)=e^x+x^2, x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

(i) Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o)), x_o\in(-1,0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. (Μονάδες 7)

(ii) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1}<m<2$. (Μονάδες 7)

23. (**34440**) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0),\ x>0$ και $B(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x\in(1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

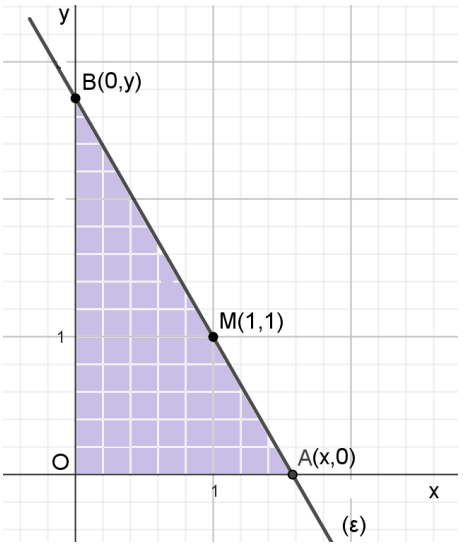
$$E(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$ (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου OAB παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,E(3))$ και τα σημεία Γ,Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



24. (**34441**) Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι: $\mathrm{K}(x) = 20x + \dfrac{2000}{x} + 1220$ ευρώ με $x > 0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

25. (**36814**) Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\ m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι: $\mathrm{K}(x) = 8x + \frac{3200}{x}$, $x > 0$ (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 07)