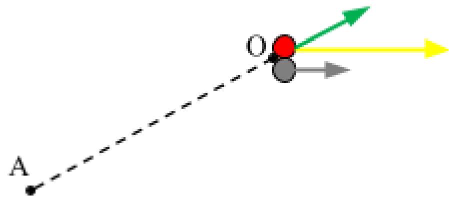
Ένα σε έλικα και ένα σε ευθεία

Ένα σωματίδιο Σ_1 μάζας m και φορτίου $q > 0$ επιταχύνεται μεταξύ δύο σημείων Α, Ο διαφοράς δυναμικού $V_{AO} = V$ και στο σημείο Ο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, που σχηματίζει γωνία θ με την κατεύθυνση του $\vec{B}$. Την ίδια στιγμή ένα άλλο σωματίδιο Σ_2 ίδιας μάζας και φορτίου, εκτοξεύεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο από το ίδιο σημείο Ο, στην κατεύθυνση του $\vec{B}$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$. Να αγνοήσετε την ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων.



i) α) Το χρονικό διάστημα, μέχρι τη συνάντηση των δύο σωματιδίων είναι $\Delta\tau = \dfrac{2\pi m}{qB}$ και η συνάντηση γίνεται πάντα πάνω στον άξονα Ox.

β) Το χρονικό διάστημα, μέχρι τη συνάντηση των δύο σωματιδίων είναι $\Delta\tau = \dfrac{2\pi m}{qB}$ και η συνάντηση δε γίνεται πάντα πάνω στον άξονα Ox.

γ) Το χρονικό διάστημα, μέχρι τη συνάντηση των δύο σωματιδίων είναι $\Delta\tau = \dfrac{\pi m}{2qB}$ και η συνάντηση γίνεται πάντα πάνω στον άξονα Ox.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και δικαιολογείστε την.

ii) Για να συναντηθούν τα δύο σωματίδια, πρέπει η ταχύτητα του δεύτερου να έχει μέτρο

α) $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{qV}{m}}\sigma\upsilon\nu\theta$ β) $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2qV}{m}}\sigma\upsilon\nu\theta$ γ) $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{qV}{m}}\eta\mu\theta$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και δικαιολογείστε την.

iii) Το δεύτερο σωματίδιο διανύει στο χρονικό διάστημα $\Delta\tau$ διάστημα

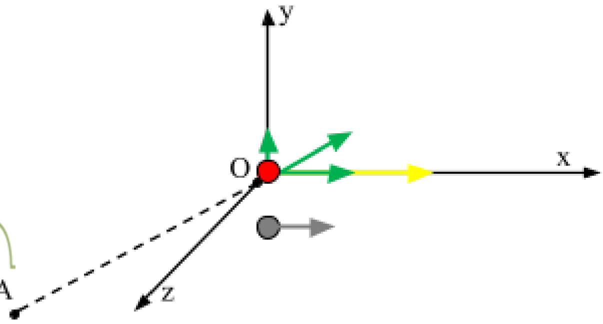
α) $\Delta s = \sqrt{\dfrac{Vm}{q}} \cdot \dfrac{2\pi}{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ β) $\Delta s = \sqrt{\dfrac{Vm}{3q}} \cdot \dfrac{2\pi}{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ γ) $\Delta s = \sqrt{\dfrac{2Vm}{q}} \cdot \dfrac{2\pi}{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και δικαιολογείστε την.

Απάντηση

i) Στο σημείο Ο, εισόδου του σωματιδίου Σ_1 στο μαγνητικό πεδίο, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα τρισορθογώνιων αξόνων με τον άξονα των x να έχει τη φορά του $\vec{B}$ και την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ του σωματιδίου να ανήκει - όπως και η ΑΟ - στο επίπεδο xOy. Αναλύουμε την ταχύτητα σε δυο συνιστώσες $\vec{\upsilon}_{1x}$, $\vec{\upsilon}_{1y}$ με μέτρα $\upsilon_{1x} = \upsilon_1 \sigma\upsilon\nu\theta,\ \upsilon_{1y} = \upsilon_1 \eta\mu\theta$, όπως βλέπουμε στο σχήμα 1. Στο ίδιο σχήμα έχει σχεδιαστεί και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ του Σ_2 λίγο πιο κάτω για λόγους ευκρίνειας.

σχήμα 1



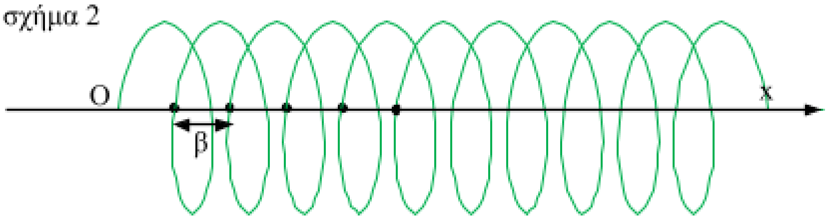
Εξαιτίας της $\vec{\upsilon}_{1x}$ δε δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο και κινείται ευθύγραμμα και ομαλά κατά τη φορά του άξονα Ox, ενώ εξαιτίας της $\vec{\upsilon}_{1y}$ δέχεται δύναμη Lorentz που το εξαναγκάζει να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση, στο επίπεδο yOz. Η κίνηση που τελικά θα εκτελέσει το σωματίδιο Σ_1 είναι ομαλή ελικοειδής, μετατοπιζόμενο κατά τη φορά του άξονα των x.

Ο χρόνος συνάντησης θα αντιστοιχεί σε μετατόπιση του Σ_1 ίση με το βήμα της έλικας, δηλαδή σε μια περίοδο T της ομαλής του κυκλικής κίνησης.

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Για να συναντηθούν πρέπει προφανώς το Σ_1 να φτάνει στον άξονα Ox, ο οποίος γενέτειρα της νοητής κυλινδρικής επιφάνειας, πάνω στην οποία αναπτύσσεται η έλικα (σχήμα 2).

σχήμα 2



Σωστή απάντηση → α

ii) Η ταχύτητα εισόδου του σωματιδίου Σ_1 στο μαγνητικό πεδίο βρίσκεται από το ΘΜΚΕ μεταξύ των σημείων Α και Ο.

$$K_O - K_A = W_{F_{\eta\lambda}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_1^{\,2} - 0 = q \cdot (V_A - V_O) \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2q \cdot V}{m}} \quad (1)$$

Ο χρόνος συνάντησης είδαμε ότι θα αντιστοιχεί σε μετατόπιση του Σ_1 ίση με το βήμα της έλικας, δηλαδή σε μια περίοδο T της ομαλής του κυκλικής κίνησης. Αυτό γίνεται με την $\vec{\upsilon}_{1x}$.

Άρα πρέπει $\Delta x_2 = \beta \Leftrightarrow \upsilon_2 \cdot T = \upsilon_{1x} \cdot T \Leftrightarrow \upsilon_2 = \upsilon_1 \sigma\upsilon\nu\theta \xrightarrow{(1)} \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2q \cdot V}{m}} \sigma\upsilon\nu\theta$

Σωστή απάντηση → β

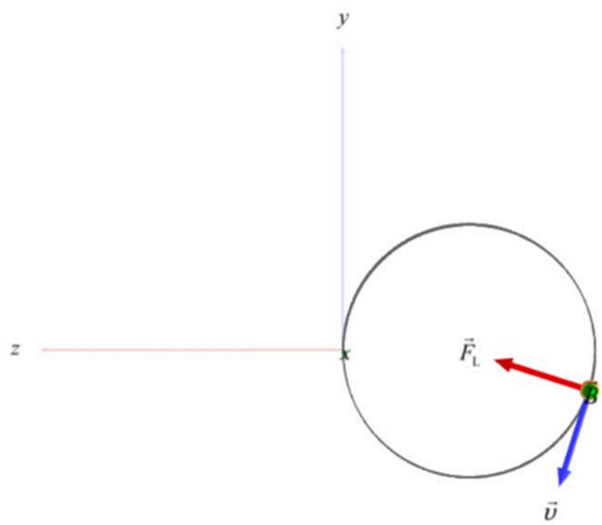
iii) Η αντίστοιχη μετατόπιση του Σ_2 είναι

$$\Delta s = \upsilon_2 \cdot \Delta\tau = \sqrt{\frac{2qV}{m}}\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \sqrt{\frac{2qVm^2}{mq^2}}\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \frac{2\pi}{B} = \sqrt{\frac{2Vm}{q}} \cdot \frac{2\pi}{B}\sigma\upsilon\nu\theta$$

Σωστή απάντηση → γ

Σχόλιο

Αν το σωματίδιο Σ_1 έχει θετικό φορτίο και δούμε την τροχιά του από εμπρός, δηλαδή με τον άξονα *x* να έρχεται προς το μάτι μας, θα έχουμε την παρακάτω κάτοψη. Παρατηρούμε τον άξονα των *y* να φαίνεται εφαπτόμενος στην κυκλική προβολή της ελικοειδούς τροχιάς στο επίπεδο *yOz*.



Ανδρέας Ριζόπουλος