# Лекція №5
## Двопровідна довга лінія

Розрахуємо коефіцієнт згасання

$$\alpha = \frac{r_1}{2Z_0}.$$

Активний опір:

$$r_1 \approx \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}, \qquad (***)$$

де $\mu_1$ і $\sigma$ - магнітна проникність та питома провідність провідників.

$$\alpha = \frac{r_1}{2Z_0} = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}\frac{1}{120\ln\frac{d}{a}} = \frac{1}{240}\frac{\sqrt{\frac{f\mu_1}{\pi\sigma}}}{a\ln\frac{d}{a}}\left[\frac{Неп}{м}\right]. \qquad (***)$$

Якщо дроти мідні, то:

$$\sigma = 5{,}8\times10^{7}\,См/м \quad \text{і} \quad \mu_1 = 4\pi\times10^{-7}\,Гн/м$$

$$\Rightarrow r_1 \approx \frac{8{,}3\sqrt{f}}{a}\times10^{-8}\left[Ом/м\right]$$

$$\alpha = 1{,}5\times10^{-8}\frac{\sqrt{f}}{a\lg\frac{d}{a}}\left[\frac{Неп}{м}\right]$$

або

$$\alpha = 13\times10^{-8}\frac{\sqrt{f}}{a\ln\frac{d}{a}}\left[\frac{дБ}{м}\right]$$

Тут $f$ частота [Гц], $a$ - розмір в [см].

### Коаксіальна лінія

**Коаксіальна лінія** – це електричний кабель, що складається з розташованих співвісно центрального провідника та екрана, розділених ізоляційним матеріалом або повітряним проміжком. Винайдено та запатентовано у 1880 році британським фізиком Олівером Хевісайдом. Відкрита двопровідна лінія схематично була показана на рис. 1, коаксіальна лінія – на рис. 3.

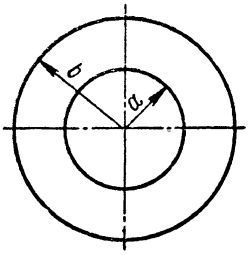



Рисунок 3.

Погонні параметри коаксіальної лінії (погонна ємність, індуктивність, опір, провідність):

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}, \qquad L_1 = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a},$$

$$r_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \qquad g_1 = \omega C_1 tg\delta, \tag{1}$$

де $\varepsilon$ – діелектрична проникність;

$a, b$ _ радіус зовнішнього та внутрішнього провідників;

$\mu$ _ магнітна проникність простору навколо проводів;

$\mu_1$ _ магнітна проникність матеріалу дротів;

$\sigma$ _ питома провідність матеріалу дротів;

$tg\delta$ – тангенс кута діелектричних втрат, що характеризує втрати в діелектрику, причому найчастіше цими втратами нехтують, тобто задають $g_1 \approx 0$.

Хвильовий опір коаксіальної лінії

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Швидкість розповсюдження в коаксіальній лінії

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}. \tag{3}$$

Коефіцієнт згасання при $g_1 \approx 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Для лінії з повітряним заповненням

$$Z_0 = 60\ln\frac{b}{a} = 138\lg\frac{b}{a}[\quad],$$

$$\alpha = \frac{1}{866}\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\ln\frac{b}{a}}\left[\frac{Неп}{м}\right]. \tag{5}$$

На практиці найбільшого поширення набули коаксіальні лінії з $Z_0 = 50$ і 75.

Таким чином, можна сказати, що фазова швидкість у розглянутих лініях збігається зі швидкістю поширення електромагнітної хвилі (ЕМВ) у безмежному діелектрику з параметрами $\varepsilon, \mu$. З погляду теорії електромагнітного поля (ТЕМП) поширення хвиль струму і напруги по проводах обумовлено поширенням ЕМВ у просторі, що прилягає до провідних поверхонь лінії.

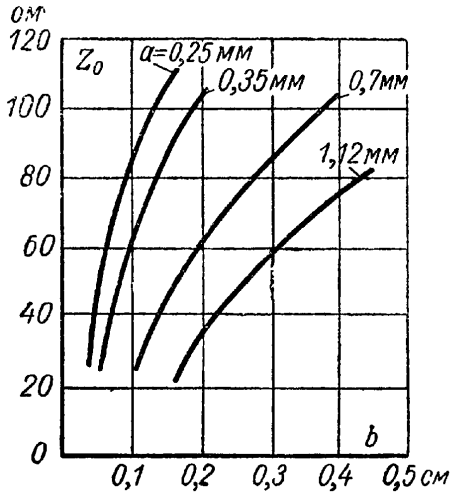



Рисунок 4 Залежність хвильового опору коаксіальної лінії від розмірів її перерізу

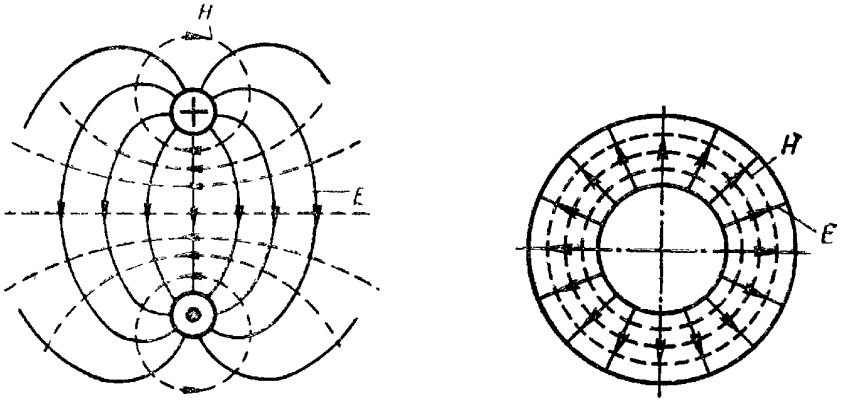
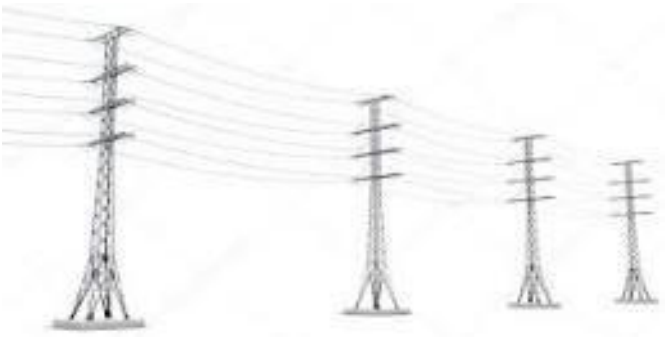



Рисунок 5 Структура електричного та магнітного полів в поперековому перерізі відкритої двопровідної лінії та коаксіальної лінії





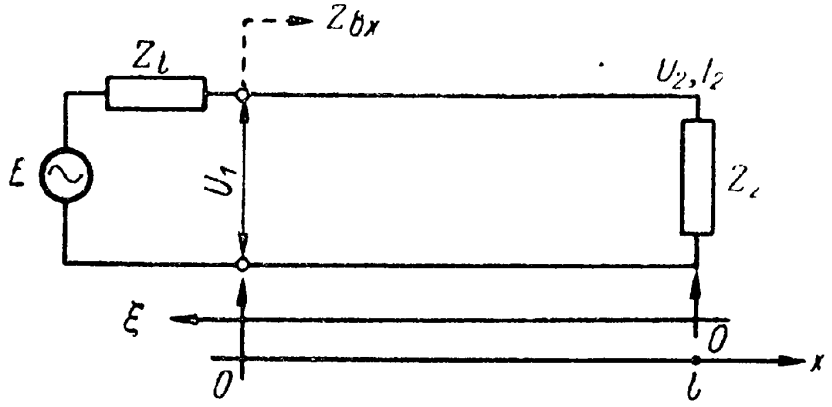
## Режим хвиль, що біжать

Розглянемо режим, при якому існує тільки пряма хвиля, що біжить. Така хвиля може бути в однорідній лінії нескінченної протяжності (гіпотетичний випадок). На практиці дуже важливо визначити умови існування хвиль, що біжать, в лінії кінцевих розмірів.

Згадаймо, що коефіцієнт відбиття:

$$p_и = \frac{Z_н - Z_0}{Z_н + Z_0}$$ якщо $Z_н = Z_0$, то $p_и = \frac{Z_н - Z_0}{Z_н + Z_0} = \frac{0}{Z_н + Z_0} = 0$.

Таким чином, для отримання хвиль, що біжать, потрібно щоб $Z_н = Z_0$. Тоді потужність падаючої хвилі, за винятком невеликої частини, що витрачається у провіднику та ізоляції, передаватиметься в опорі навантаження.




Рисунок

Ми пам'ятаємо, що при розподілі хвилі, що біжить, уздовж осі $x$, її амплітуда зменшується за експонентним законом, а фази коливань змінюються лінійно.

Миттєві значення $u$ та $i$ (врахуємо як і раніше, що початкова фаза в точці $x=0$ дорівнює нулю) знайдемо з отриманих раніше формул.

$$\begin{cases} u = \mathrm{Re}(\dot{U}e^{j\omega t}) = U_1 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) \\ i = \mathrm{Re}(\dot{I}e^{j\omega t}) = \dfrac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x - \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

Для лінії з малими втратами кут зсуву фаз між фазами струму та напруги приблизно дорівнює нулю, оскільки $Z_0$ активне, $\varphi = 0$

$$\begin{cases} u = U_1 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) = U_1 e^{-\alpha x}e^{j\omega t}e^{-\beta x} \\ i = \dfrac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) = \dfrac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}e^{j\omega t}e^{-\beta x} \end{cases} \quad (2)$$

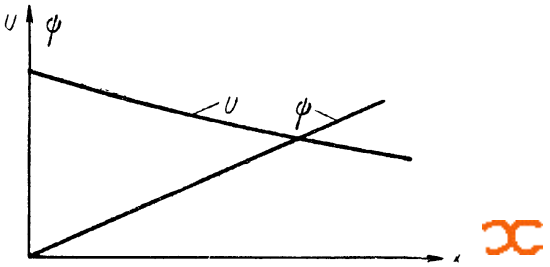



Рисунок 1 Зміна амплітуди і початкової фази напруги хвилі, що біжить, вздовж лінії

Амплітуда зменшується з коефіцієнтом $e^{-\alpha x}$, фаза $\psi = \beta x$ лінійно змінюється прямо пропорційно $x$.

Знайдемо вхідний опір лінії в режимі хвилі, що біжить. Для цього скористаємося рівняннями для $u$ та $i$ в комплексному вигляді. Запис у показовій формі (тобто через експоненту) для падаючої (прямої) хвилі:

$$\begin{cases} \dot{U}_{пр} = \dot{U}_1 e^{-\alpha x}e^{-j\beta x} \\ \dot{I}_{пр} = \dfrac{\dot{U}_1}{Z_0}e^{-\alpha x}e^{-j\beta x} \end{cases} \quad (3)$$

Для знаходження $Z_{вх}$ знайдемо $\dot{U}_{вх}$ і $\dot{I}_{вх}$ (тобто $u$ і $i$ в точці $x=0$)

$$\begin{cases}\dot{U}_{вх}=\dot{U}_1 e^0 e^0\\ \dot{I}_{вх}=\dfrac{\dot{U}_1}{Z_0}e^0 e^0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{U}_{вх}=\dot{U}_1\\ \dot{I}_{вх}=\dfrac{\dot{U}_1}{Z_0}\end{cases} \Rightarrow \dot{Z}_{вх}=\frac{\dot{U}_{вх}}{\dot{I}_{вх}}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1/Z_0}=\dot{Z}_0 \tag{4}$$

Вхідний опір лінії в режимі хвиль, що біжать, не залежить від її довжини і дорівнює хвильовому опору лінії.

Знайдемо миттєву потужність у довільній точці лінії (5)

$$p=u\cdot i=\left|\begin{cases}u=U_1e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x)=U_1e^{-\alpha x}e^{j\omega t}e^{-\beta x}\\ i=\dfrac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x)=\dfrac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}e^{j\omega t}e^{-\beta x}\end{cases}\right|=U_1e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x)\cdot\frac{U_1}{Z_0}e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x)=$$

$$=\frac{\dot{U}_1^2}{Z_0}e^{-2\alpha x}\cos^2(\omega t-\beta x)\ \geq 0$$

звідси видно, що при будь-яких $t$ та $x\leq l$ величина миттєвої потужності $p\geq 0$. Це означає, що в режимі хвиль, що біжать, від генератора в лінію надходить потужність, яка за винятком невеликої частини, яка витрачається на нагрівання, передається в навантаження.

Розрахуємо **коефіцієнт корисної дії** довгої лінії в режимі хвиль, що біжать. ККД це відношення середньої потужності, яка споживається навантаженням до середньої потужності, яка віддається генератором $\eta=\dfrac{p_2}{p_1}$. Для цього згадаємо вирази для напруги та струму прямої хвилі

$$\dot{U}_{пр}=\dot{U}_1e^{-\gamma x}$$
$$\dot{I}_{пр}=\frac{\dot{U}_1}{Z_0}e^{-\gamma x}$$

На опорі навантаження (в точці $x=l$)

$$\dot{U}_2=\dot{U}_1e^{-\gamma l},\ \dot{I}_2=\frac{\dot{U}_1}{Z_0}e^{-\gamma l} \tag{6}$$

Для знаходження енергетичних величин в комплексному вигляді вводиться штучний прийом, зокрема для середньої потужності $p=\dfrac{1}{2}\dot{U}\dot{I}^*$.

Середня потужність, що споживається навантаженням

$$p_2=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{U}_2\dot{I}_2^*)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{U}_1e^{-\gamma l}\cdot\left(\frac{\dot{U}_1}{Z_0}e^{-\gamma l}\right)^*\right)=\left(\frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0}e^{-\gamma l}(e^{-\gamma l})^*\right)=\left|\gamma=\alpha+j\beta\right|=\frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0}e^{-2\alpha l}. \tag{7}$$

Аналогічно середня потужність, що віддається генератором

$$p_1=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{U}_1\dot{I}_1^*)=\frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0} \tag{8}$$

Тоді ККД дорівнює

$$\eta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0} e^{-2\alpha l} \frac{2Z_0}{\dot{U}_1^2} = e^{-2\alpha l} \tag{9}$$

Для лінії з малими втратами $\alpha l \ll 1$ та $\eta = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l$ (з ряду Тейлора для експоненти).