

Лекція №5

Двопровідна довга лінія

Розрахуємо коефіцієнт згасання

$$\alpha = \frac{r_1}{2Z_0}$$

Активний опір:

$$r_1 \approx \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}}, \quad (***)$$

де μ_1 і σ - магнітна проникність та питома провідність провідників.

$$\alpha = \frac{r_1}{2Z_0} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}} \frac{1}{120 \ln \frac{d}{a}} = \frac{1}{240} \frac{\sqrt{f \mu_1}}{a \ln \frac{d}{a}} \left[\frac{\text{Hen}}{\text{м}} \right]. \quad (***)$$

Якщо дроти мідні, то:

$$\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ См/м} \quad \text{і} \quad \mu_1 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\Rightarrow r_1 \approx \frac{8,3\sqrt{f}}{a} \times 10^{-8} \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right]$$

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a \lg \frac{d}{a}} \left[\frac{\text{Hen}}{\text{м}} \right]$$

або

$$\alpha = 13 \times 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a \ln \frac{d}{a}} \left[\frac{\text{дБ}}{\text{м}} \right]$$

Тут f частота [Гц], a - розмір в [см].

Коаксіальна лінія

Коаксіальна лінія – це електричний кабель, що складається з розташованих співвісно центрального провідника та екрана, розділених ізоляційним матеріалом або повітряним проміжком. Винайдено та запатентовано у 1880 році британським фізиком Олівером Хевісайдом. Відкрита двопровідна лінія схематично була показана на рис. 1, коаксіальна лінія – на рис. 3.

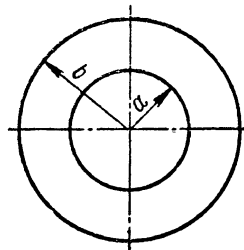


Рисунок 3.

Погонні параметри коаксіальної лінії (погонна ємність, індуктивність, опір, провідність):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}, & L_1 &= \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \\ r_1 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), & g_1 &= \omega C_1 \operatorname{tg} \delta, \end{aligned} \quad (1)$$

де ϵ – діелектрична проникність;

a, b – радіус зовнішнього та внутрішнього провідників;

μ – магнітна проникність простору навколо проводів;

μ_1 – магнітна проникність матеріалу дротів;

σ – питома провідність матеріалу дротів;

$\operatorname{tg} \delta$ – тангенс кута діелектричних втрат, що характеризує втрати в діелектрику, причому найчастіше цими втратами нехтують, тобто задають $g_1 \approx 0$.

Хвильовий опір коаксіальної лінії

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}. \quad (2)$$

Швидкість розповсюдження в коаксіальній лінії

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}}. \quad (3)$$

Коефіцієнт згасання при $g_1 \approx 0$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}}. \quad (4)$$

Для лінії з повітряним заповненням

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 60 \ln \frac{b}{a} = 138 \lg \frac{b}{a} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right], \\ \alpha &= \frac{1}{866} \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\sigma}} \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{\ln \frac{b}{a}} \left[\frac{\text{дБ}}{\text{м}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

На практиці найбільшого поширення набули коаксіальні лінії з $Z_0 = 50$ і 75.

Таким чином, можна сказати, що фазова швидкість у розглянутих лініях збігається зі швидкістю поширення електромагнітної хвилі (ЕМВ) у безмежному діелектрику з параметрами ε, μ . З погляду теорії електромагнітного поля (ТЕМП) поширення хвиль струму і напруги по проводах обумовлено поширенням ЕМВ у просторі, що прилягає до провідних поверхонь лінії.

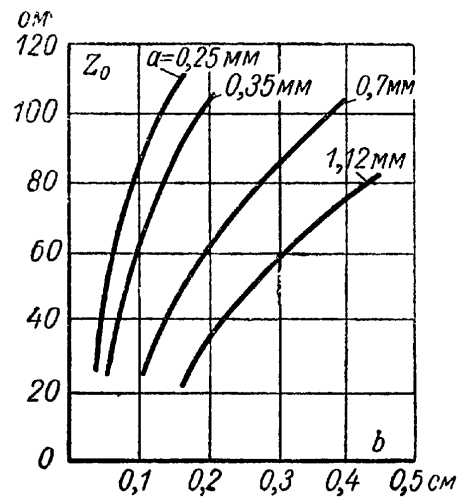


Рисунок 4 Залежність хвильового опору коаксіальної лінії від розмірів її перерізу

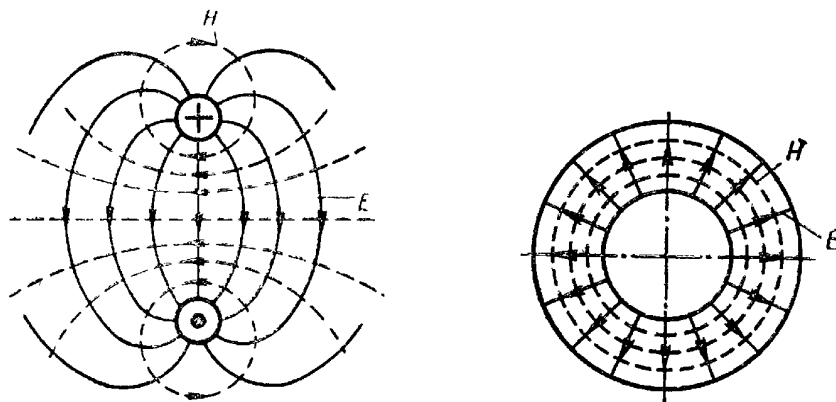
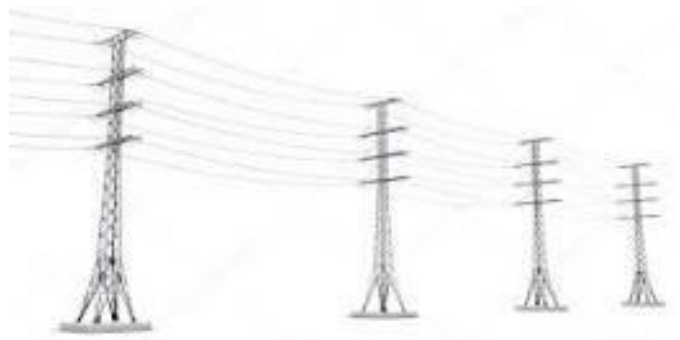


Рисунок 5 Структура електричного та магнітного полів в поперечному перерізі відкритої двопровідної лінії та коаксіальної лінії



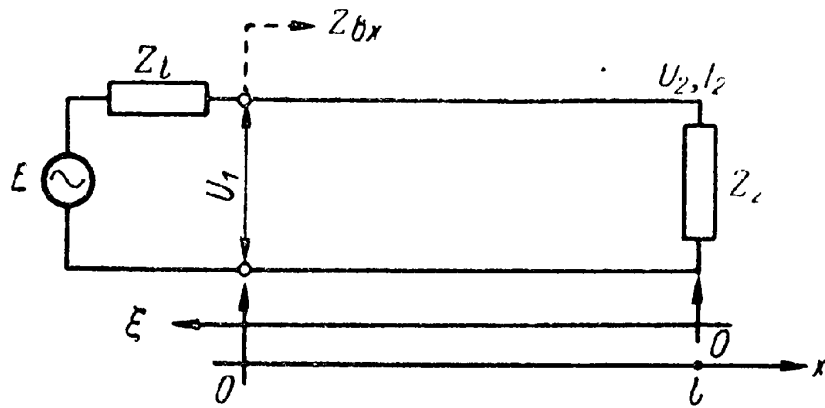
Режим хвиль, що біжать

Розглянемо режим, при якому існує тільки пряма хвиля, що біжить. Така хвиля може бути в однорідній лінії нескінченної протяжності (гіпотетичний випадок). На практиці дуже важливо визначити умови існування хвиль, що біжать, в лінії кінцевих розмірів.

Згадаймо, що коефіцієнт відбиття:

$$p_u = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} \quad \text{якщо } Z_H = Z_0, \text{ то } p_u = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} = \frac{0}{Z_H + Z_0} = 0.$$

Таким чином, для отримання хвиль, що біжать, потрібно щоб $Z_H = Z_0$. Тоді потужність падаючої хвилі, за винятком невеликої частини, що витрачається у провіднику та ізоляції, передаватиметься в опорі навантаження.



Рисунок

Ми пам'ятаємо, що при розподілі хвилі, що біжить, уздовж осі x , її амплітуда зменшується за експонентним законом, а фази коливань змінюються лінійно.

Миттєві значення u та i (врахуємо як і раніше, що початкова фаза в точці $x=0$ дорівнює нулю) знайдемо з отриманих раніше формул.

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re}(\dot{U}e^{j\omega t}) = U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \\ i = \operatorname{Re}(\dot{I}e^{j\omega t}) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

Для лінії з малими втратами кут зсуву фаз між фазами струму та напруги приблизно дорівнює нулю, оскільки $Z_0 \approx$ активне, $\varphi = 0$

$$\begin{cases} u = U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = U_1 e^{-\alpha x} e^{j\omega t} e^{-j\beta x} \\ i = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{j\omega t} e^{-j\beta x} \end{cases} \quad (2)$$

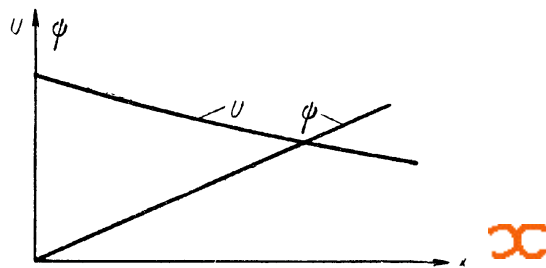


Рисунок 1 Зміна амплітуди і початкової фази напруги хвилі, що біжить, вздовж лінії

Амплітуда зменшується з коефіцієнтом $e^{-\alpha x}$, фаза $\psi = \beta x$ лінійно змінюється прямо пропорційно x .

Знайдемо вхідний опір лінії в режимі хвилі, що біжить. Для цього скористаємося рівняннями для u та i в комплексному вигляді. Запис у показовій формі (тобто через експоненту) для падаючої (прямої) хвилі:

$$\begin{cases} U_{np} = \dot{U}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \\ I_{np} = \frac{\dot{U}_1}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \end{cases} \quad (3)$$

Для знаходження Z_{ex} знайдемо $\dot{U}_{ex}$ і $\dot{I}_{ex}$ (тобто u і i в точці $x=0$)

$$\begin{cases} \dot{U}_{ex} = \dot{U}_1 e^0 e^0 \\ \dot{I}_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{Z_0} e^0 e^0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \dot{U}_{ex} = \dot{U}_1 \\ \dot{I}_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \end{cases} \quad \& \quad \dot{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}_{ex}}{\dot{I}_{ex}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1/Z_0} = \dot{Z}_0 \quad (4)$$

Вхідний опір лінії в режимі хвиль, що біжать, не залежить від її довжини і дорівнює хвильовому опорі лінії.

Знайдемо миттєву потужність у довільній точці лінії (5)

$$p = u \cdot i = \left\{ \begin{aligned} u &= U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = U_1 e^{-\alpha x} e^{j\omega t} e^{-\beta x} \\ i &= \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{j\omega t} e^{-\beta x} \end{aligned} \right\} = U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \cdot \frac{U_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) =$$

$$= \frac{U_1^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x) \geq 0$$

звідси видно, що при будь-яких t та $x \leq l$ величина миттєвої потужності $p \geq 0$. Це означає, що в режимі хвиль, що біжать, від генератора в лінію надходить потужність, яка за винятком невеликої частини, яка витрачається на нагрівання, передається в навантаження.

Розрахуємо коефіцієнт корисної дії довгої лінії в режимі хвиль, що біжать. ККД це відношення середньої потужності, яка споживається навантаженням до середньої

$$\eta = \frac{p_2}{p_1}$$

потужності, яка віддається генератором p_1 . Для цього згадаємо вирази для напруги та струму прямої хвилі

$$\begin{aligned} \dot{U}_{np} &= \dot{U}_1 e^{-\gamma x} \\ \dot{I}_{np} &= \frac{\dot{U}_1}{Z_0} e^{-\gamma x} \end{aligned}$$

На опорі навантаження (в точці $x=l$)

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\gamma l}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_0} e^{-\gamma l} \quad (6)$$

Для знаходження енергетичних величин в комплексному вигляді вводиться

штучний прийом, зокрема для середньої потужності $p = \frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^*$.

Середня потужність, що споживається навантаженням

$$p_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_2 \dot{I}_2^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{U}_1 e^{-\gamma l} \cdot \left(\frac{\dot{U}_1}{Z_0} e^{-\gamma l} \right)^* \right) = \left(\frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0} e^{-\gamma l} (e^{-\gamma l})^* \right) = |\gamma = \alpha + j\beta| = \frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0} e^{-2\alpha l} \quad (7)$$

Аналогічно середня потужність, що віддається генератором

$$p_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_1 \dot{I}_1^*) = \frac{\dot{U}_1^2}{2Z_0} \quad (8)$$

Тоді ККД дорівнює

$$\eta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{U_1^2}{2Z_0} e^{-2\alpha l} \frac{2Z_0}{U_1^2} = e^{-2\alpha l} \quad (9)$$

Для лінії з малими втратами $\alpha l \ll 1$ та $\eta = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l$ (з ряду Тейлора для експоненти).