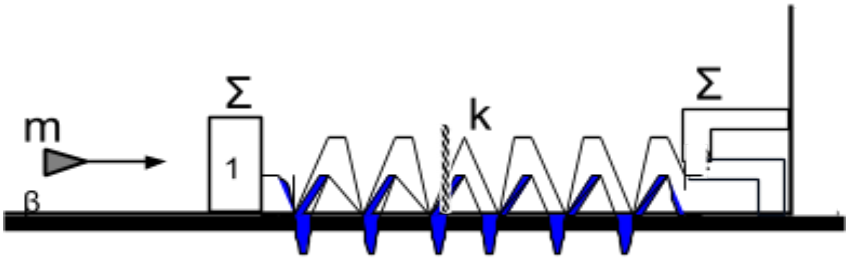
Μια ΑΑΤ και η συνέχεια Νο2



Σχήμα 1.

Το σώμα Σ_1 του σχήματος 1 έχει μάζα m_1=0.9kg και είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα Σ_2 σχήματος Π και μάζας m_2=3kg το οποίο είναι δεμένο στον τοίχο με μη εκτατό νήμα που έχει όριο θραύσης $T_{θρ}$=60N. Το μήκος του νήματος είναι κατάλληλο ώστε το νήμα να είναι οριακά λυγισμένο (T_N=0) όσο το ελατήριο πιέζει το σώμα Σ_2 και να τεντώνει τις στιγμές που το ελατήριο τείνει να το αποκολλήσει από τον τοίχο. Τα σώματα αρχικά είναι ακίνητα πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή t_0=0, ένα βλήμα μάζας $m_β$=0.1kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_0$=100m/s συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα Σ_1 και αμέσως μετά το συσσωμάτωμα ξεκινά να εκτελεί Α.Α.Τ. με D=k.

i. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του για όσο χρόνο δεν έχει κοπεί το νήμα. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα δεξιά.

ii. Να βρείτε σε ποια θέση θα κοπεί το νήμα και το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος την στιγμή αυτή.

iii. Για την στιγμή αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κάθε σώματος και τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

iv. Να βρείτε την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου την πρώτη στιγμή που η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μέγιστη μετά το κόψιμο του νήματος.

v. Για την στιγμή του ερωτήματος **iv)** να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κάθε σώματος και τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Απάντηση

i. Εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής για το βλήμα και το σώμα Σ_1.

$$\vec{P}^{πριν} = \vec{P}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{1,2} \xrightarrow{(+)\rightarrow} m_β υ_0 = (m_β + m_1)υ_\Sigma \Rightarrow 0,1 \cdot 100 = 1 υ_\Sigma \Rightarrow υ_\Sigma = 10 m/s$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι η μέγιστη για την ταλάντωση που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_β + m_1}} = 10 r/s$$

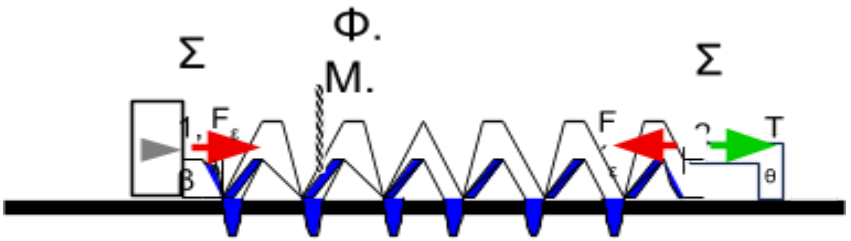
$$υ_\Sigma = ω \cdot A \rightarrow A = 1m$$

Ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα

x=1·ημ(10·t) , S.I.

ii.

Το νήμα θα κοπεί όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο και το ελατήριο ασκεί δύναμη προς τα αριστερά στο σώμα Σ_2.
Οριακά το σώμα Σ_2 ισορροπεί έχοντας το νήμα την οριακή του τιμή.



Σχήμα 2.

Από την ισορροπία του Σ_2.

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{0} \rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} - T_\theta = 0 \rightarrow k\cdot\Delta l = T_\theta \rightarrow \Delta l = 0,6m$$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου ισούται με την απομάκρυνση x της ταλάντωσης.
Από την ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος προκύπτει:

$$E= ½ \cdot m_{1,\beta}\cdot \upsilon^2 + ½ \cdot k\cdot x^2 \rightarrow$$
$$½ \cdot 100\cdot 1^2 = ½ \cdot 1\cdot \upsilon^2 + ½ \cdot 100\cdot 0,6^2 \rightarrow$$
$$\mathbf{\upsilon=8m/s}$$

iii.

$$\frac{dK_{1,\beta}}{dt} = \left|F_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|\upsilon\right|\cdot\sigma\upsilon\nu 180 = -k\cdot\Delta\ell\cdot\upsilon = -100\cdot 0,6\cdot 8J/s = -480J/s$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \left|F'_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|\upsilon_2\right|\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = 0$$

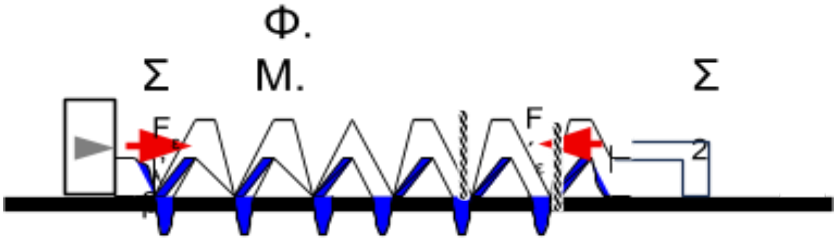
Επειδή η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή ισχύει:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\left.\frac{dK}{dt}\right|_{\Sigma\upsilon\sigma.} = 480J/s$$

Πράγματι:

$$K_{1-\beta} + K_2 + U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} = \sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow \frac{dK_{1-\beta}}{dt} + \frac{dK_2}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0 \rightarrow$$
$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\left(\frac{dK_{1-\beta}}{dt} + \frac{dK_2}{dt}\right) \rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\left.\frac{dK}{dt}\right|_{\Sigma\Upsilon\Sigma T.}$$

iv.



Σχήμα 3.

Εξαιτίας της $F_{ελ}$ το συσσωμάτωμα αρχικά επιβραδύνεται ενώ το $Σ_2$ εξαιτίας της $F'_{ελ}$ θα επιταχυνθεί.

Όσο το συσσωμάτωμα έχει μεγαλύτερη ταχύτατα από το σώμα $Σ_2$ το ελατήριο συνεχίζει να επιμηκύνεται και τα σώματα να απομακρύνονται. Αντίθετα όταν το σώμα $Σ_2$ αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα από το συσσωμάτωμα η απόσταση μεταξύ τους θα ελαττώνεται και το ελατήριο θα μειώνει το μήκος του. Έτσι το ελατήριο θα είναι μέγιστα επιμηκυμένο και τα σώματα θα απέχουν μέγιστη απόσταση, όταν θα έχουν ίσες ταχύτητες.

Το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου.

Αν $υ_κ$ η κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων τη στιγμή που απέχουν μέγιστη απόσταση, από τη διατήρηση της ορμής μεταξύ της στιγμής αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος και τη στιγμή της μέγιστης απόστασης μεταξύ των σωμάτων, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{αρ} = \vec{p}_{τελ} \rightarrow m_{1,β}\cdot υ = m_{1,β}\cdot υ_κ + m_2\cdot υ_κ \rightarrow υ_κ = \frac{m_{1,β}\cdot υ}{m_{1,β}+m_2} = \frac{1\cdot 8}{1+3} m/s = 2m/s$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) για το σύστημα μεταξύ των δύο παραπάνω καταστάσεων παίρνουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$
$$\frac{1}{2} m_{1,β} υ_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2}\left(m_{1,β}+m_2\right) υ_κ^2 + U_{max} \rightarrow$$
$$U_{max} = \frac{1}{2} m_{1,β} υ_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2}\left(m_{1,β}+m_2\right) υ_κ^2 \rightarrow$$
$$U_{max} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8^2 J + \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,6^2 J - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2^2 J = 42J$$

v.

Τη στιγμή που μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου αναμένουμε:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}=0 \quad \text{όπως και} \quad \left.\frac{dK}{dt}\right|_{\Sigma\upsilon\sigma.}=\left.\frac{dK}{dt}\right|_{m_{1,\beta}}+\left.\frac{dK}{dt}\right|_{m_2}=0$$

$$\frac{dK_1}{dt}=-\left|F_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|\upsilon_{\kappa}\right| \quad \text{και} \quad \frac{dK_2}{dt}=+\left|F'_{\varepsilon\lambda}\right|\cdot\left|\upsilon_{\kappa}\right|$$

Οπότε $\left.\frac{dK}{dt}\right|_{\Sigma\Upsilon\Sigma T.}=\left.\frac{dK}{dt}\right|_{m_1}+\left.\frac{dK}{dt}\right|_{m_2}=0$

Και συνεπώς

$$\frac{dK_{1-\beta}}{dt}+\frac{dK_2}{dt}=-\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}\rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt}=0$$