

1.) Ondes dans les métaux

1.1)

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho_f \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) &= \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ ou } \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \text{rot} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \left(-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où la relation

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{E}) \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ or } \vec{B} = \vec{H}, \text{ on}$$

obtient donc bien la deuxième relation.

1.2)

$$\text{div} \text{rot} \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ soit } 0 = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ . La solution}$$

de cette équation en un point fixé est de la forme : $\vec{B} = a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec τ , temps caractéristique de la décroissance de la charge. $\epsilon \approx 10^{-11}$ u.s.i. et $\sigma \approx 10^7$ u.s.i. donc $\tau \approx 10^{-18}$ s. Ce temps caractéristique est en général très inférieur au temps caractéristique (période) des variations de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ donc on peut considérer ρ_f nul à tout instant et en tout point du conducteur.

1.3) En remplaçant dans la première équation : $k^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t^3}$ d'où la relation de dispersion : $k^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

1.4)

$$\left\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\| = E_0 \text{ et } \left\| \vec{j}_f \right\| = E_0 \text{ donc } Q = \frac{E_0}{E_0} = \tau \omega \approx 10^{-18} \omega. \text{ Pour une fréquence optique } \omega < 10^{16} \text{ s}^{-1} \text{ donc } Q < 10^{-2}.$$

1.5)

$$k^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial^4 \vec{E}}{\partial t^4} \text{ ou } k^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial^4 \vec{E}}{\partial t^4}$$

1.6) $\exp(j(\omega t - k_r z)) = \exp(-k_i z) \exp(j(\omega t - k_r z))$: le terme de propagation est en $(\omega t - k_r z)$, ce qui correspond bien à une onde se propageant vers $z > 0$ si $k_r > 0$.

$$k^2 = k_r^2 + k_i^2 = 2j k_r k_i = A \frac{j}{Q} \text{ d'où } k_r^2 + k_i^2 = A \text{ (1) et } 2k_r k_i = A \frac{1}{Q} \text{ (2). En combinant (1) et}$$

$$k_r^4 + A k_r^2 - \frac{A^2}{4Q^2} = 0$$

(2) on obtient l'équation de k_r :

$$k_r^2 = \frac{1}{2} A^2 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad \text{et} \quad k_i = \frac{A}{2Q k_r}$$

qui admet pour solution :

$Q \rightarrow \infty \Rightarrow k_r = \sqrt{A}$ et $k_i \rightarrow 0$ dans ce cas la propagation se fait sans absorption car le terme de conduction, donc la dissipation correspondante, devient négligeable.

1.7) $\vec{E} = E_0 e^{i k_i z} \exp(j \omega t - k_r z) \vec{u}_x$ soit en réel : $\vec{E} = E_0 e^{i k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \vec{u}_x$

$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{k_r}{\omega} E_0 \exp(j \omega t - k_r z) \vec{u}_y$ soit : $\vec{B} = \frac{k_r}{\omega} E_0 \exp(j \omega t - k_r z) \vec{u}_y$ or

$k = k_r + j k_i = \sqrt{k_r^2 + k_i^2} e^{j \phi}$ donc $\vec{B} = \frac{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}}{\omega} E_0 e^{i k_i z} \exp(j \omega t - k_r z) \vec{u}_y$ donc en grandeur

réelle : $B = \frac{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}}{\omega} E_0 e^{i k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \vec{u}_y$

1.8) $\vec{E} = \frac{1}{2} E_0 \frac{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}}{\omega} e^{i 2 k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z) \vec{u}_z$

dont la valeur moyenne est :

$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}}{\omega} e^{i 2 k_i z} \cos(\omega t) \vec{u}_z = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{k_r}{\omega} e^{i 2 k_i z} \vec{u}_z$

1.9)

en négligeant 1 devant on obtient : $k_r = \sqrt{\frac{A}{2Q}}$ et $k_i = \frac{A}{2Q k_r} = \sqrt{\frac{A}{2Q}}$ l'approximation faite

correspond à $A = A \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} = A \frac{A}{Q} = A \frac{1}{Q}$ terme qui intervient dans l'expression de k_r^2 . Donc

dans l'expression de k_r on a : $\sqrt{A} \sqrt{1 - \frac{1}{Q}} = \sqrt{A} \frac{1}{2Q}$ on a donc négligé $\frac{1}{2Q}$ devant 1, ce qui est vrai à mieux que 10^{-2} près si $Q \leq$.

Or $Q = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{1}{50}$ d'où $\lambda_0 \geq 14,4 \text{ nm}$

1.9.2) $A = \epsilon \mu \omega^2$ et $k_r = k_i = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ or

$k = k_r + j k_i = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{4}$ donc en remplaçant dans les expressions des champs :

$\vec{E} = E_0 e^{i \frac{z}{4}} \cos(\omega t - \frac{z}{4}) \vec{u}_x$ et $\vec{H} = \frac{1}{\omega} \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{4} E_0 e^{i \frac{z}{4}} \cos(\omega t - \frac{z}{4}) \vec{u}_y$ le déphasage est de $\frac{\pi}{4}$

1.9.3) δ a la dimension de l'inverse de k c'est donc une longueur. δ caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu.

1.9.4) $v_p = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon \mu}}$ le milieu est donc dispersif.

$$\begin{aligned} \text{1.9.5)} \quad \langle E^2 \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \quad \text{et} \quad \langle B^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \frac{2}{\delta^2} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} = \frac{E_0^2}{4\delta^2} e^{-2\frac{z}{\delta}} \\ \text{donc} \quad \frac{\langle E \rangle}{\langle B \rangle} &= \frac{\epsilon_0}{\mu_0} = Q \end{aligned}$$

Q donne donc la répartition de l'énergie, entre énergie magnétique et énergie électrique. Dans le cas d'un métal bon conducteur σ est grand donc Q est petit (tant que ω n'est pas trop grand), et l'énergie est principalement sous forme magnétique, à cause des courants induits dans le métal.

1.9.6) $Q = 9,59 \cdot 10^{-13}$; $\delta = 66,1 \mu\text{m}$; $k_r = \frac{2}{\delta}$ d'où $\lambda = 415 \mu\text{m}$; $v_\phi = 415 \text{ m.s}^{-1}$ la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est très faible dans le cuivre par rapport à celle du son. La valeur de δ montre que l'onde électromagnétique pénètre très peu dans le métal.

$$\begin{aligned} \text{1.9.7) a-} \quad \langle \vec{r} \rangle &= \frac{E_0^2}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} \exp\left[-\sqrt{2\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{z}{\delta}\right] \vec{u}_z \\ \text{en } z=0 : \quad \langle \vec{r} \rangle &= \frac{E_0^2}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} \vec{u}_z \quad \text{et en } z = \Delta e : \quad \langle \vec{r} \rangle = \frac{E_0^2}{2\epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} \exp\left[-\sqrt{2\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\Delta e}{\delta}\right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

b- faisons un bilan d'énergie : soit w l'énergie contenue dans la plaque :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \langle P \rangle_i - \langle P \rangle_r = \langle P \rangle \quad \text{(puissance perdue)} : \quad \langle P \rangle = ab \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} \exp\left[-\sqrt{2\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{z}{\delta}\right] e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \text{en} \\ \text{considérant } \Delta e \text{ petit :} \quad \langle P \rangle &= ab \frac{E_0^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c- } U \approx E_0 a = R i \quad \text{avec} \quad R &= \frac{a}{\sigma S} = \frac{a}{\sigma b \Delta e} \quad P_J = \frac{U^2}{R} = \frac{E_0^2 a^2 \sigma b \Delta e}{2a} = \langle P \rangle \quad \text{l'énergie} \\ \text{électromagnétique perdue est dissipée sous forme de chaleur.} \end{aligned}$$

2.) Ondes sur une corde tendue avec amortissement le long de l'axe Oz :

$$\text{2.1) L'équation de propagation s'écrit :} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\text{2.2) } k^2 = \frac{F}{v^2} - j \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{on peut établir l'analogie avec la relation du 1.5 à l'aide des}$$

correspondances : $\epsilon \leftrightarrow \mu$; $\mu \leftrightarrow$; $\sigma \leftrightarrow \alpha$

$$\text{2.3) en écrivant :} \quad k^2 = A \frac{1}{Q} \quad \text{avec} \quad A = \frac{F}{v^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{F}{\alpha} \quad , \text{ on peut transposer les résultats}$$

$$\text{du (1.9.2):} \quad k_r = k_i = \sqrt{\frac{1}{2\frac{F}{v^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{v}{F}} \quad \text{on obtient alors :}$$

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} y_0^2 e^{i2\frac{z}{\lambda}}; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = j k y = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} e^{j\frac{z}{\lambda}}$$

donc en grandeur réelle :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \cos\left(\frac{z}{\lambda} - t\right) = \frac{1}{4} y_0 e^{i\frac{z}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \langle e_p \rangle = \frac{F}{4} \frac{2}{\lambda^2} y_0^2 e^{i2\frac{z}{\lambda}} = \frac{F}{4} \frac{1}{F} y_0^2 e^{i2\frac{z}{\lambda}}$$

par conséquent :

$$\frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} = \frac{1}{1} = Q$$

l'expression est donc la même qu'en (1.9.5.)

3.) Onde thermique dans un milieu :

3.1) résultat du cours :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

3.2) $\rho c j \omega k^2 = 0$ soit : $k^2 = j \frac{\rho c}{2} \omega$ donc

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} j \sqrt{\frac{\rho c}{2}} \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} j \omega \sqrt{\frac{\rho c}{2}}$$

avec $\sqrt{\frac{\rho c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $T(z, t) = T_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\lambda}\right);$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2}{\rho c}}$$

3.3) $\frac{V_T}{V_B} = \sqrt{\frac{\rho c}{\rho c}}$ pour le cuivre : $9,49 \cdot 10^{-2}$ pour le fer : 0,210

la différence entre ces valeurs est liée aux différences sur les valeurs de σ , μ et λ essentiellement. On voit le rôle plus particulièrement important joué par μ et λ .