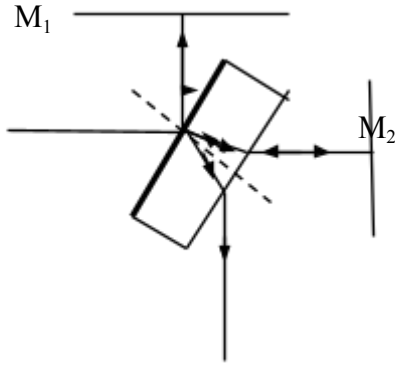


PARTIE I : INTERFEROMETRE DE MICHELSON

I.A.1 La lame séparatrice réelle a une épaisseur non nulle. Le rayon qui se réfléchit sur le miroir 1 ne traversera qu'une fois la lame quand celui qui se réfléchit sur M_2 l'aura traversé trois fois. Il faut donc rajouter sur le chemin du rayon « 1 » une lame compensatrice de même épaisseur que la lame séparatrice placée parallèlement à cette dernière.



La compensation n'est pas parfaite si les rayons ont des angles d'incidence différents. Il faut placer le détecteur dans le plan focal de la lentille pour observer les interférences.

I.A.2 a) $\delta_0 = 2OI_2 - 2OI_1 = 2e$

b) Soit $\underline{s}_1 = A e^{i\omega t} = \underline{a}_1 e^{i\omega t}$ la vibration arrivant en F' après réflexion sur M_1

Soit $\underline{s}_2 = A e^{i(\omega t + \phi)} = \underline{a}_2 e^{i\omega t}$ celle arrivant en F' après réflexion sur M_2 . ($\phi = 2\pi \delta / \lambda$)

$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = A (1 + e^{-i\phi}) e^{i\omega t} = a e^{i\omega t}$

L'éclairement reçu en F' est : $E_0 = \underline{a} \cdot \underline{a}^* = (E_{inc}/4) 2 (1 + \cos(2\pi(2e)/\lambda))$

c) Ecran à grande distance : éclairement uniforme sur la section du faisceau laser.

I.B.1 a) $(OI_1) = n_x L_1 = (1 - h_0/2) L_1$

b) $(OI_2) = n_y L_2 = (1 + h_0/2) L_2$

c) $\delta = 2(L_2 - L_1) + h_0(L_1 + L_2) = 2e + h_0(L_1 + L_2)$

I.B.2 $E = (E_{inc}/2)(1 + \cos(2\pi/\lambda)(2e + 2h_0L))$

$= (E_{inc}/2)(1 + \cos(2\pi/\lambda)(2e) \cos(2\pi/\lambda)2h_0L - \sin(2\pi/\lambda)(2e) \sin(2\pi/\lambda)2h_0L)$

Au premier ordre en h_0 : $E \sim (E_{inc}/2)(1 + \cos\phi_0 - 2h_0Lk \sin\phi_0)$

I.B.3 a) $P_{mes} = E S = (P_{inc}/2) (1 + \cos\phi_0 - 2h_0Lk \sin\phi_0)$

b) si non OG : $P_{mes} = (P_{inc}/2) (1 + \cos\phi_0)$, si OG $P_{mes} = (P_{inc}/2)(1 + \cos\phi_0 - 2h_0Lk \sin\phi_0)$

donc $|\Delta P_{mes}| = P_{inc} h_0 L k |\sin\phi_0|$

Cette variation est maximale pour $\phi_0 = (\pi/2)[\pi]$ et $|\Delta P_{mes}|_{max} = P_{inc} h_0 L k$

Application numérique : $|\Delta P_{mes}|_{max} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ W} \ll P_{inc}$ donc difficilement détectable !

I.B.4 a) $\text{signal/bruit} = P_{inc} h_0 L k |\sin\phi_0| / \sqrt{(P_{inc}/2)(1 + \cos\phi_0)}$

Ce rapport sera maximal si $\cos\phi_0 = -1$ ou $\phi_0 = \pi[2\pi]$: frange sombre

b) $\phi_0 = 3187 \cdot 10^3 \pi \dots$ cohérent... (précision illusoire ?)

I.B.5 $h_{\min} = 2,7 \cdot 10^{-19}$

I.B.6 a) $h_{\min} \gg 10^{-21}$: le dispositif ne permet pas de détecter les ondes gravitationnelles provoquées par les supernovae de l'amas de la Vierge.

b) $h_{\min}$ varie en $1/\sqrt{P_{\text{inc}}}$ donc $h_{\min}$ varie en $1/a$ (a amplitude) donc $h_{\min}$ varie proportionnellement à la distance à la source. Les ondes gravitationnelles détectées proviennent de supernovae 100 fois plus proche que celles de l'amas de la Vierge.

PARTIE II : ISOLATION SISMIQUE

II.A Pendule simple

II.A.1 Dans R galiléen, avec une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, -\vec{u}_y)$.

Bilan des forces sur M :

- Le poids $M\vec{g} = Mg(-\sin\theta \vec{u}_\theta + \cos\theta \vec{u}_r)$
- La tension du fil $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

Le principe fondamental de la dynamique donne : $M \vec{a}(M/R) = M\vec{g} + \vec{T}$

avec $\vec{a}(M/R) = -L_p \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + L_p \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

En projection sur $\vec{u}_\theta$: $ML_p \ddot{\theta} = -Mg \sin\theta$

Comme θ est petit (petit déplacement), on a $x_1 - x_0 = L_p \theta$ d'où l'équation vérifiée par x_1 :

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 (x_1 - x_0) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{g/L_p}$$

Solution : $x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + x_0$

II.A.2 Si on rajoute la force d'amortissement (avec $\vec{u}_\theta \approx \vec{e}_x$), l'équation devient :

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 (x_1 - x_0) - \dot{x}_1/\tau$$

ou en utilisant $x_2 = x_1 - x_0$: $\ddot{x}_2 + \dot{x}_2/\tau + \omega_0^2 x_2 = 0$

En multipliant par $M \dot{x}_2$ on obtient le bilan : $dE_c/dt - P_{\text{frott}} + dE_p/dt$: on retrouve le théorème de la puissance mécanique.

II.A.3 L'équation caractéristique de l'équation différentielle est : $r^2 + r/\tau + \omega_0^2 = 0$

Son discriminant est $\Delta = (1/\tau)^2 - 4\omega_0^2$

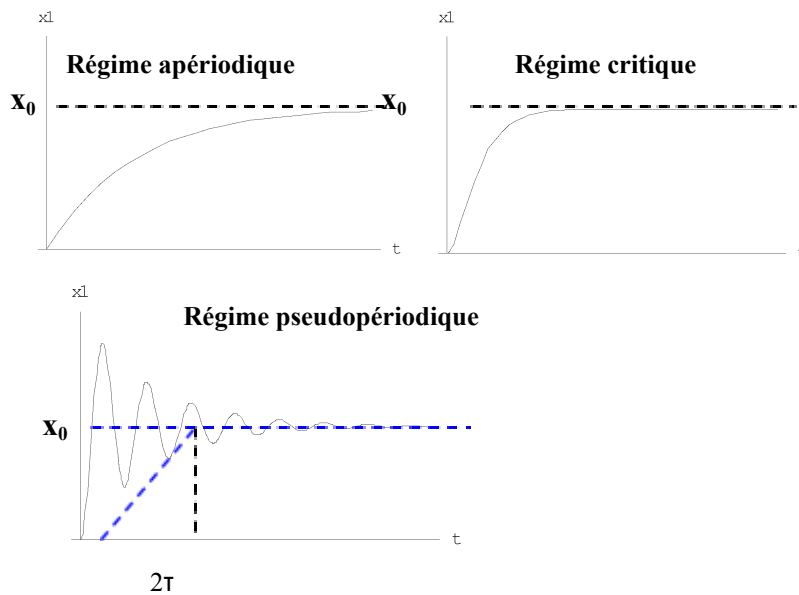
Si $\Delta > 0$, le régime est apériodique : $x_1 = x_0 + e^{-t/2\tau} (Ae^{-\sqrt{\Delta}t/2} + Be^{\sqrt{\Delta}t/2})$

Si $\Delta = 0$, le régime est critique : $x_1 = x_0 + e^{-t/2\tau} (At + B)$

Si $\Delta < 0$, le régime est pseudopériodique : $x_1 = x_0 + e^{-t/2\tau} (A \cos(\sqrt{-\Delta}/2 t) + B \sin(\sqrt{-\Delta}/2 t))$

τ est un temps caractéristique du retour de x_1 vers x_2 .

Courbes :



On obtient τ en traçant les exponentielles enveloppes, l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote $x_1 = x_0$ donne 2τ ...

II.B.1 l'équation différentielle est toujours : $\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 (x_1 - x_0) - \dot{x}_1/\tau$

II.B.2 a) En passant en complexe $\underline{x}_1 = \underline{X}_1 e^{i\omega t}$, $\underline{x}_0 = \underline{X}_0 e^{i\omega t}$, on obtient :

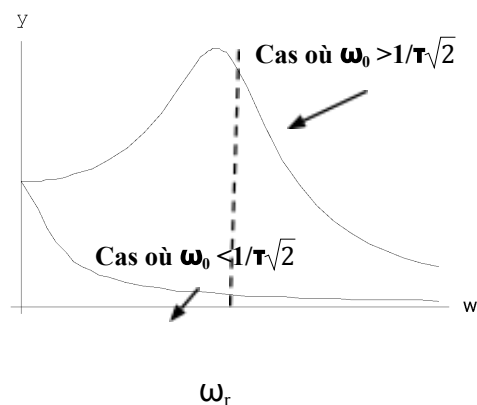
$$\underline{X}_1(-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega/\tau) = \omega_0^2 \underline{X}_0$$

$$b) |\underline{X}_1/\underline{X}_0| = \omega_0^2 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

On pose $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2$.

$f'(\omega) = 0$ si $\omega = 0$ ou $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2\tau^2\omega_0^2}$ qui n'existe que si $\omega_0 > 1/\tau\sqrt{2}$

Courbes :



Dans le cadre du projet Virgo, il faut que $|\underline{X}_1/\underline{X}_0|$ soit le plus petit possible donc $\omega \gg \omega_0$.

c) Application numérique : $X_1 = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ m}$. La différence de marche introduite par l'onde gravitationnelle est $\delta_{\text{sup}} = 2h_0 L = 3 \cdot 10^{-18} \text{ m}$: l'isolation n'est donc pas suffisante.

d) Au contraire, pour mesurer l'amplitude des ondes sismiques, il faut $\omega \ll \omega_0$.

II.C Amélioration du dispositif

II.C.1 a) Dans R galiléen, avec une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, -\vec{u}_y)$.

Bilan des forces sur M :

- Le poids $M\vec{g} = Mg(-\sin\theta \vec{u}_\theta + \cos\theta \vec{u}_r)$
- La tension du fil $\vec{T}_N = -T_N \vec{u}_r$

Le principe fondamental de la dynamique donne : $M \vec{a}(M/R) = M\vec{g} + \vec{T}_N$

avec $\vec{a}(M/R) = -L_p \ddot{\theta} \vec{u}_r + L_p \ddot{\theta} \vec{u}_\theta \approx L_p \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ (petits déplacements)

d'où en projetant sur $\vec{u}_r \approx -\vec{e}_z$: $T_N = Mg = kmg$

b) Dans R galiléen, avec une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta i}, -\vec{u}_y)$ relative à la ième masse

Bilan des forces sur cette ième masse :

- Le poids $m\vec{g} = mg(-\sin\theta_i \vec{u}_{\theta i} + \cos\theta_i \vec{u}_r)$
- Les tensions des fils $\vec{T}_i$ et $-\vec{T}_{i+1}$

En projetant sur l'axe Oz, on obtient pour les angles petits :

$$T_i = mg + T_{i+1}$$

De même : $T_{i+1} = mg + T_{i+2}$

$$T_{i+2} = mg + T_{i+3}$$

...

$$T_{N-1} = mg + T_N$$

En ajoutant toutes ces égalités, on obtient : $T_i = (N-i)mg + T_N = mg(N+k-i)$

II.C.2 a) d'après IIC.1.a, la projection de la loi fondamentale sur $\vec{u}_{\theta N} \approx \vec{e}_x$ donne :

$$\ddot{x}_N = -\omega_0^2 (x_N - x_{N-1}) - \dot{x}_N / \tau$$

b) Dans R galiléen, avec une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta i}, -\vec{u}_y)$ relative à la ième masse

Bilan des forces sur cette ième masse :

- Le poids $m\vec{g} = mg(-\sin\theta_i \vec{u}_{\theta i} + \cos\theta_i \vec{u}_r)$
- La tension du fil entre la (i-1)ème masse et la ième masse $\vec{T}_i = -T_i \vec{u}_r$
- La tension du fil entre la ième masse et la (i+1)ème masse :
 $-\vec{T}_{i+1} = T_{i+1}(\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\vec{u}_{\theta i} + \cos(\theta_{i+1}-\theta_i)\vec{u}_r)$

En projetant sur $\vec{u}_{\theta i} \approx \vec{e}_x$, et avec $x_i - x_{i-1} = L_p \theta_i$ et $x_{i+1} - x_i = L_p \theta_{i+1}$

$$m\ddot{x}_i = - (m/\tau) \dot{x}_i - mg(x_i - x_{i-1}) + T_{i+1}(x_{i+1} - x_i - x_i + x_{i-1})$$

Comme $T_{i+1} = mg(N+k-(i+1))$, on obtient :

$$m\ddot{x}_i + (m/\tau) \dot{x}_i + mgx_i(1 + 2(N + k - (i + 1))) =$$

$$mg(x_{i+1}(N + k - (i + 1)) + (N + k - (i + 1) + 1)x_{i-1})$$

$$\ddot{x}_i + (1/\tau) \dot{x}_i + \omega_0^2 (2(N + k - i) - 1) = \omega_0^2 ((N + k - i - 1)x_{i+1} + (N + k - i)x_{i-1})$$

II.C.3 En passant à la notation complexe : $\underline{x}_N(-\omega^2 + j\omega/\tau - \omega_0^2) = \omega_0^2 \underline{x}_{N-1}$ ou $\underline{x}_N(\mathbf{A}_N) = \underline{x}_{N-1}$

De même : $\underline{x}_i(\mathbf{A}_i) = (\mathbf{k} + \mathbf{N} - \mathbf{i}) \underline{x}_{i-1} + (\mathbf{k} + \mathbf{N} - (\mathbf{i} + 1)) \underline{x}_{i+1}$

II.C.4 a) $B_N = 1$; $B_{N-1} = A_N = 1 + A_0$

b) Pour $\omega \gg \omega_0$, $A_i = A_0$ avec $|A_0| = \omega^2/\omega_0^2 \gg 1$ donc $B_0 \approx A_1 = -\omega^2/\omega_0^2$ ($N=1=k$)

c) $B_4 \approx -\omega^2/\omega_0^2$ $A_4 = A_0 + 9 \approx B_4$

$$B_3 \approx \omega^4/8\omega_0^4 \quad A_3 \approx A_4$$

$$B_2 \approx -\omega^6/64\omega_0^6 \quad A_2 \approx A_4$$

$$B_1 \approx \omega^8/8^3\omega_0^8 \quad A_1 \approx A_4$$

$$B_0 \approx \omega^{10}/8^4\omega_0^{10}$$

$\underline{x}_N = (1/B_0) \underline{x}_0$ d'où une atténuation de $8^4 \cdot (\omega_0/\omega)^{10}$ soit pour 10 Hz, une atténuation de $4 \cdot 10^{-10}$.

Ce n'est pas encore suffisant pour le projet car $X_N = 4 \cdot 10^{-16} \text{m} \gg \delta_{\text{sup}} = 2h_0L = 3 \cdot 10^{-18} \text{m}$ mais on a bien amélioré le dispositif.

PARTIE III : CONTROLE DE LA POSITION DU MIROIR

III.A.1 Le régime est linéaire donc $V^+ = V^- = 0$.

En appliquant le théorème de Millman, on obtient $V(t) = V_A = \varepsilon(t)/(2 + RC\omega)$

D'où $\underline{H}_1 = H_0/(1 + j(\omega/\omega_1))$ avec $H_0 = -1/2$ et $\omega_1 = 2/RC$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre.

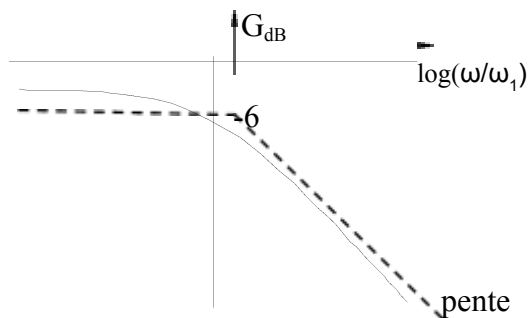
III.A.2 Etude asymptotique du gain $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}_1|$

Quand $\omega \ll \omega_1$, $\underline{H}_1 = H_0$ d'où $G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| = -6 \text{ dB}$

Quand $\omega \gg \omega_1$, $\underline{H}_1 = H_0/(j\omega/\omega_1)$ d'où $G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| - 20 \log(\omega/\omega_1)$

Quand $\omega = \omega_1$, $\underline{H}_1 = H_0/(1 + j)$ d'où $G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| - 3$

Diagramme de Bode :

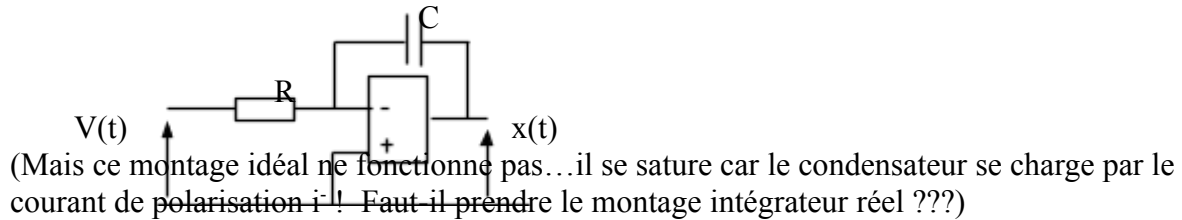


20dB/décade

III.B Asservissement du miroir

III.B.1 Pour passer de $V(t)$ à $x(t)$, il faut la fonction « intégrateur ».

III.B.2 Le montage intégrateur idéal est :



$$\underline{H}_2 = \underline{x} / \underline{V} = -1/jRC\omega$$

III.B.3 Si $x(t)$ est différent de x_{ref} , une tension $\varepsilon(t)$ apparaît et met en mouvement le miroir jusqu'à ce que $x(t) = x_{ref}$.

III.B.4 a) $\underline{S} = \underline{x} = \underline{H}_2 \underline{V} = \underline{H}_2 \underline{H}_1 (E_{ref} - \underline{S})$ d'où $\underline{F} = \underline{H}_2 \underline{H}_1 / (1 + \underline{H}_2 \underline{H}_1)$

En remplaçant : $\underline{F} = 1/(1+2jRC\omega-(RC\omega)^2) = 1/(1+jRC\omega)^2$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre.

Stabilité : l'équation différentielle vérifiée par $S(t) = x(t)$ est :

$$(RC)^2 d^2S/dt^2 + 2RC dS/dt + S = E_{ref}$$

L'équation caractéristique de l'équation homogène s'écrit : $a r^2 + br + c = 0$

La solution est stable si $(-b/2a) < 0$ ce qui est le cas ici.

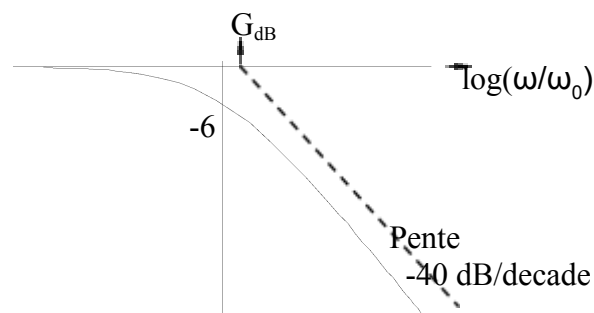
b) Etude asymptotique du gain en décibel $G_{dB} = 20 \log|\underline{F}|$

Quand $\omega \ll \omega_0 = 1/RC$: $\underline{F} = 1$, $G_{dB} = 0$ dB

Quand $\omega \gg \omega_0$: $\underline{F} = 1/(jRC\omega)^2$, $G_{dB} = -40 \log(RC\omega)$

Quand $\omega = \omega_0$: $G_{dB} = -6$ dB

Diagramme de Bode :



c) La bande passante à -3 dB du système asservi est $f_p = [0, a/2\pi RC]$ avec

$a = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)} \approx 0,64$. L'amplitude maximale de $S(t)$ ou de $x(t)$ est $\delta l/2$ donc le déplacement

maximal du miroir est de δl pendant $T/2$ d'où $v_{seuil} = 2 f_p \delta l$

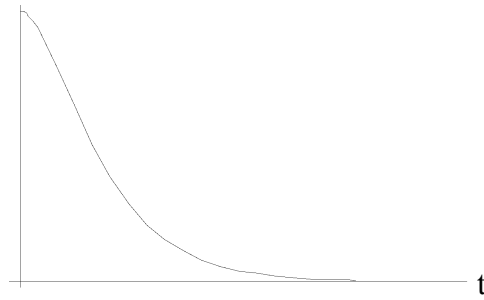
III.B.5 l'équation différentielle vérifiée par $S(t) = x(t)$ est :

$$(RC)^2 d^2S/dt^2 + 2RC dS/dt + S = E_{ref} = 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est nul : le régime est critique

$S(t) = e^{-t/RC}(At+B) = S_0(1+t/RC)e^{-t/RC}$ compte-tenu des conditions initiales.

Allure : $S(t)$



L'asservissement est correct car, pour le régime critique, c'est le retour le plus rapide vers zéro, ici la référence.

PARTIE IV : LE LASER

IV.A A propos de l'émission stimulée

IV.A.1 $N_1/N_0 = \exp(-(E_1-E_0)/kT)$

IV.A.2 Quand T tend vers 0, N_1 tend vers 0 : les atomes sont tous dans leur état fondamental, A haute température, N_1 tend vers N_0 : tous les atomes sont dans un état excité.
 $N_1 = N_0$ impossible (?).

IV.A.3 $E_{\text{photon}} = h \nu = h c / \lambda$ d'où $E_{\text{photon}} = 1,87 \cdot 10^{-19} \text{ J} = E_1 - E_0$

$N_1/N_2 = 1,8 \cdot 10^{-20}$: rapport extrêmement faible.

IV.B.1 $dN_{\text{abs}} = C N_0 u(\nu) dt$

IV.B.2 $dN_{\text{em}} = A N_1 dt$

IV.B.3 Le nombre d'atomes doit rester constant donc $dN_{\text{abs}} = - dN_{\text{em}}$

D'où $N_1/N_0 = - C u(\nu)/A$

IV.B.4 En remplaçant $u(\nu)$: $N_1/N_0 = -C D(\nu) (\exp(h_{\text{Planck}} \nu/kT)-1)^{-1}/A$

Ce résultat n'est pas compatible avec la distribution de Maxwell-Boltzmann

IV.C.1 Le nombre d'atomes doit rester constant donc $dN_{\text{abs}} = - dN_{\text{em}} - dN_{\text{ind}}$

$C N_0 u(\nu) dt = - A N_1 dt - B N_1 u(\nu) dt$

$N_1/N_0 = -C u(\nu)/(A+B u(\nu)) = -C D(\nu)/[B D(\nu)+A(\exp(h_{\text{Planck}} \nu/kT)-1)]$

On retrouve la forme de la distribution de Maxwell Boltzmann si $A = B D(\nu)$

IV.C.2 Schéma fonctionnel :

