

**UNIVERSIDAD
DE MURCIA****Universidad
Politécnica
de Cartagena****EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD****306 - MATEMÁTICAS II – PAU2025 – JULIO**

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden, En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es de 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan, No se podrán usar gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B)**1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

a) [1] Discuta el sistema en función del parámetro k.**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 2 & 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = 6 + k + 2k - 2 - 6 - k^2 = -k^2 + 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 1}{-2}, k = 1, k = 2$$

– Si $k \neq 1, k \neq 2, \det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $k = 1,$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1, f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = -1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

– Si $k = 2, \det A = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 1 \ 2| = 1 \neq 0, \text{rg } A = 2$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = 2f_1, f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0, \text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A < n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) [0,5] Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.**Resolución**

Si $k = 2$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$y = -1 - 2z; x + (-1 - 2z) + z = 1 \Rightarrow x = 2 + z$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 2 + k, y = -1 - 2k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

c) [1] Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.**Resolución**

Si $k \neq 1, k \neq 2$ sabemos que el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Vamos a usar la regla de Cramer para resolverlo:

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 2 & 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 0 & k & 3 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & k & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}; \det A = -(k-1)(k-2)$$

$$\det A_x = 6 + 2k - k^2 - 6 = 2k - k^2 = k(2 - k) = -k(k - 2); \det A_y = 6 + k - 2 - 6 = k - 2$$

$$\det A_z = 2 + 2k - 2 - 2k = 0$$

$$x = \frac{A_x}{\det \det A} = \frac{-k(k-2)}{-(k-1)(k-2)} = \frac{k}{k-1}; \quad y = \frac{A_y}{\det \det A} = \frac{k-2}{-(k-1)(k-2)} = \frac{-1}{k-1};$$

$$z = \frac{A_z}{\det \det A} = \frac{0}{-(k-1)(k-2)} = 0$$

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) [0,75] Demuestre que $(A + I)^2 = 2A + I$, y que $(A + I)^3 = 3A + I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Resolución

$$(A + I)^2 = (A + I)(A + I) = AA + AI + IA + I^2 = A^2 + A + A + I = 0 + 2A + I = 2A + I$$

$$(A + I)^3 = (A + I)^2(A + I) = (2A + I)(A + I) = 2A^2 + 2AI + IA + I^2 = 2 \cdot 0 + 2A + A + I = 3A + I$$

b) [0,75] Demuestre que la matriz $I - A$ es inversa de la matriz $I + A$.

Resolución

$$\text{Observa que } (I - A)(I + A) = I^2 + IA - AI - A^2 = I^2 + A - A - 0 = I.$$

$$(I + A)(I - A) = I^2 - IA + AI - A^2 = I^2 - A + A - 0 = I. \text{ Luego, la inversa de } I - A \text{ es } I + A \text{ y viceversa}$$

c) [1] Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A.

Resolución

$$\text{La ecuación es } IX + AX = A. \text{ Sacando factor común } X, \text{ por la derecha, } (I + A)X = A.$$

$$\text{Multiplicando por } (I - A) \text{ por la izquierda en los dos miembros: } (I - A)(I + A)X = (I - A)A.$$

$$\text{Operando, } IX = X = IA - A^2 = A - 0 = A. \text{ O sea, la solución de la ecuación es } X = A$$

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Resolución

$$\text{Piden } L = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{\sin 0 - 0}{0 \sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital:}$$

$$\frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{\cos 0 - 1}{\sin 0 + 0 \cos 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Otra vez L'Hôpital:}$$

$$\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-\sin 0}{2 \cos 0 - 0 \sin 0} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow L = 0$$

b) [0,5] $\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5}$

Resolución

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{9x^2 + 5} = \frac{\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2}}{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}}{9 + \frac{5}{x^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{9 + \frac{5}{x^2}} = \frac{\sqrt{0 + 0}}{9 + 0} = 0$$

c) [1] $x(e^{1/x} - 1)$

Resolución

$$x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital:}$$

$$\frac{(e^{1/x} - 1)'}{(1/x)'} = \frac{e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = e^{1/x} = e^0 = 1. \text{ Luego, } x(e^{1/x} - 1) = 1$$

2B) Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$.

a) [1,5] Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$

Resolución

$$\int f(x) dx = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg} x \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int \operatorname{tg} x \frac{1 - \cos^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int 2 \operatorname{tg} x \frac{1 - \cos^2 x}{x} dx - \int \operatorname{tg} x dx$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - (-\ln |\cos \cos x|) + k = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos \cos x| + k$$

b) [0,75] Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \pi/4$

c) [0,25] Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2} \ln \ln \left(\frac{e}{2} \right)$

Resolución

Como para $0 < x < \pi/4$, $f(x) = \operatorname{tg}^3 x > 0$, el área que se pide es $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos \cos x|$. Por la regla de Barrow,

$$A = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln \left| \cos \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 0 + \ln |\cos \cos 0| \right]$$

$$A = \frac{1}{2} 1^2 + \ln \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \ln \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \ln \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} + \ln \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \ln e - \frac{1}{2} \ln \ln 2$$

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi: 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Resolución

Un vector normal de π es $\vec{n}_\pi = (2, 1, a)$. La recta r está dada como intersección de dos planos.

Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los

$$\text{planos: } \vec{d}_r = (1, 1, 1) \times (-1, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, -1) //$$

$$(-3, 2, 1)$$

Si $z = 1$ en r , $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - 2y = -1 \end{cases}$; sumando, $-y = -1$, $y = 1$; $x = -1 \Rightarrow A(-1, 1, 1) \in r$.

Para que $r \subset \pi$ se debe cumplir $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$, o sea $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ y $A \in \pi$

Sustituyendo, $-6 + 2 + a = -4 + a = 0$ (despejando, $a = 4$); $2(-1) + 1 + a = b \Rightarrow -1 + 4 = b \Rightarrow b = 3$

Conclusión: debe ser $a = 4$, $b = 3$

b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta r a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$

Resolución

r y π son secantes si $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \Rightarrow -4 + a \neq 0$. O sea, $a \neq 4$. En forma paramétrica,

$$r: \begin{cases} x = -1 - 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Para $a = 0$, $b = 7$, $\pi: 2x + y = 7$. Sabemos que r y π son secantes. Sustituyendo en la ecuación de π

$$2(-1 - 3k) + 1 + 2k = 7, -4k - 1 = 7, -4k = 8, k = -2,$$

$$\begin{cases} x = -1 - 3(-2) \\ y = 1 + 2(-2) \\ z = 1 + (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ El punto de corte es } P(5, -3, -1)$$

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$

a) [1] Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π

Resolución

La recta pedida es la que pasa por P y es perpendicular a π ; $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 1, 3) \Rightarrow$

$$r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

b) [0,75] Halle dicho punto.

Resolución

Sustituyendo r en la ecuación de π : $1 + k + 2 + k + 3(1 + 3k) = 0 \Rightarrow 11k + 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{6}{11}$

Luego, $\begin{cases} x = 1 + \frac{-6}{11} \\ y = 2 + \frac{-6}{11} \\ z = 1 + 3\frac{-6}{11} \end{cases}$. El punto de corte es $Q\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right)$

c) [0,75] Calcule la distancia que debe recorrer.

Resolución

La distancia es $|\vec{PQ}|$; $\vec{PQ} = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right) - (1, 2, 1) = \left(\frac{-6}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-18}{11}\right)$

$$|\vec{PQ}| = \frac{6}{11} |(-1, -1, -3)| = \frac{6}{11} \sqrt{11} \cong 1,81 \text{ u}$$

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S_1 hay 240 espectadores, en la sala S_2 hay 180 y en la sala S_3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S_1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S_2 al 50% y la de la sala S_3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) [1] Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
 b) [0,5] Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S_3 .
 c) [1] Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S_3 si le ha gustado.

Resolución

S_1 = el espectador es de la sala 1 S_2 = el espectador es de la sala 2 S_3 = el espectador es de la sala 3

G = al espectador le gusta la película

Usamos una tabla de contingencia con los datos:

	S_1	S_2	S_3	Total
G	40% de 240 = 0,4 · 240 = 96	50% de 180 = 90	90% de 80 = 0,9 · 80 = 72	258
G^c	240 - 96 = 144	90	80 - 72 = 8	242
Total	240	180	80	500

a) Se pide $p(G) = \frac{258}{500} = 0,516 = 51,6\%$

b) Pide $p(G/S_3) = \frac{p(G \cap S_3)}{p(S_3)} = \frac{\frac{72}{500}}{\frac{80}{500}} = \frac{72}{80} = 0,9 = 90\%$

c) Ahora nos piden $p(S_3/G) = \frac{p(G \cap S_3)}{p(G)} = \frac{\frac{72}{500}}{\frac{258}{500}} = \frac{72}{258} = \frac{12}{43} \cong 0,2791 = 27,91\%$

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

- a) [0,5] Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
 b) [0,75] Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
 c) [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
 d) [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

Resolución

a) $X = n^\circ$ de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes $\rightarrow B(280; 0,95)$.

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{280}{k} 0,95^k 0,05^{280-k}$, con $k = 0, 1, 2, \dots, 279, 280$.

En b) se pide $p(X \geq 261)$. Bastante laborioso si se quiere hacer usando la fórmula anterior. Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una v.a. X sigue una binomial $B(n, p)$ que cumple: $n \geq 30$, $np \geq 5$ y $n(1 - p) \geq 5$, entonces, la v.a. X se puede sustituir por otra v.a. $X' \rightarrow N(\mu, \sigma)$, siendo μ la media de X , $\mu = np$ y σ la desviación típica, $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$. Es decir, $X' \rightarrow N(np, \sqrt{np(1 - p)})$ "

En este problema,

$$n = 280 \geq 30, p = 0,95; np = 280 \cdot 0,95 = 266 \geq 5 \quad \text{y} \quad n(1 - p) = 280 \cdot 0,05 = 14 \geq 5$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{280 \cdot 0,95 \cdot 0,05} \cong 3,65; X' \rightarrow N(266; 3,65) \Rightarrow Z = \frac{X' - 266}{3,65} \rightarrow N(0, 1).$$

b) Para hallar $p(X \geq 261)$ tomamos un intervalo de la recta que contenga a los números enteros mayores o iguales que 261. Por ejemplo, tomamos $(260,5; +\infty)$.

$$p(X \geq 261) = p(X' \geq 260,5) = p\left(\frac{X' - 266}{3,65} \geq \frac{260,5 - 266}{3,65}\right) \cong p(Z \geq -1,51) = p(Z \leq 1,51) = 0,9345$$

La probabilidad de que falten plazas en el avión es del 93,45%

c) Se pide la probabilidad del suceso contrario, que es $1 - 0,9345 = 0,0655 = 6,55\%$

d) Ahora nos piden $p(X = 260)$; tomamos el intervalo $(259,5; 260,5)$ que contiene exactamente al entero 260.

$$p(X = 260) =$$

$$p(259,5 < X' < 260,5) = p\left(\frac{259,5 - 266}{3,65} < \frac{X' - 266}{3,65} < \frac{260,5 - 266}{3,65}\right) \cong p(-1,78 < Z < -1,5)$$

$$= p(1,5 < Z < 1,78) = p(Z < 1,78) - p(Z < 1,5) \cong 0,9625 - 0,9332 = 0,0293 = 2,93\%$$