

1 *Corrigé de Laurent BEAU*

*Professeur de Sciences Physiques en Math Spé MP**

Lycée Mohamed V. CASABLANCA

*N'hésitez pas à me signaler des erreurs ou à me suggérer des commentaires ou des réponses plus "élégantes".
Merci.*

Collisions nucléaires et fragmentation

Première partie

Analyse cinématique d'une collision

1. Cinématique du problème à deux corps.

Nous noterons M_1 et M_2 les masses respectives et B_1 et B_2 les positions respectives des noyaux cible (indice 1) et projectile (indice 2)

$$\text{a) } \begin{cases} \mathbf{R}_G = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2} = \frac{A_1 \mathbf{r}_1 + A_2 \mathbf{r}_2}{A_1 + A_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_G - \frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_G + \frac{A_1}{A_1 + A_2} \mathbf{r} \end{cases}$$

b) D'après sa définition, la quantité de mouvement relative des deux noyaux s'écrit :

$$\mathbf{p} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

soit, en introduisant la masse réduite μ du système : $\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m$, on obtient :

$$\mathbf{p} = \mu (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

On remarque que $\mathbf{p}$ ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est calculée. En particulier : $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}$.

c) La quantité de mouvement totale du système s'écrit : $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

Le moment cinétique total du système par rapport à O est défini par : $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2$

Dans le référentiel barycentrique : $\mathbf{L}^* = \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2^*$

Dans le référentiel barycentrique : $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{p} = \mathbf{p}^* = \mathbf{p}_2^* = -\mathbf{p}_1^*$. On en déduit : $\mathbf{L}^* = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$

En utilisant la composition des vitesses : $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1^* + M_1 \mathbf{v}_G$ et $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2^* + M_2 \mathbf{v}_G$. Il vient alors :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + (M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{v}_G$$

$$\text{ou encore} \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{R}_G \wedge \mathbf{P}$$

résultat qui constitue le théorème de Kœnig relatif au moment cinétique.

2. Energie cinétique

L'énergie cinétique totale E_c s'écrit dans le référentiel du laboratoire : $E_c = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2M_2}$ qui s'écrit en

composant les vitesses : $E_c = E_c^* + E_c(G)$ où $E_c(G) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m(A_1 + A_2)}$ car $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$.
Ceci constitue le théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique.

3. Energie potentielle d'interaction coulombienne.

- a) Considérons une sphère uniformément chargée en volume. Le champ électrostatique $\mathbf{E}(M)$ créé par cette distribution de charge en M est radial car tout plan passant par M et par le centre de la sphère est un plan de symétrie.

De plus, la norme de ce champ ne dépend que de r (en coordonnées sphériques) car la distribution est invariante par rotation autour du centre de la sphère. On en déduit : $\mathbf{E}(M) = E(r)\mathbf{e}_r$.

Le flux de ce champ à travers une sphère de rayon r vaut donc : $\oiint \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = E(r)4\pi r^2$

$$\begin{cases} Q_{\text{int}} = Q & \text{si } r > R \\ Q_{\text{int}} = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3 & \text{si } r < R \end{cases}$$

La charge intérieure à cette sphère vaut :

Le théorème de Gauss s'écrivant : $\oiint \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, on en tire :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r & \text{si } r > R \\ \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \mathbf{e}_r & \text{si } r < R \end{cases}$$

On en déduit alors le potentiel électrostatique : $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E(r)dr$

En prenant $V = 0$ à l'infini, il vient :

$$\begin{cases} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \\ V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + V(0) & \text{si } r < R \end{cases}$$

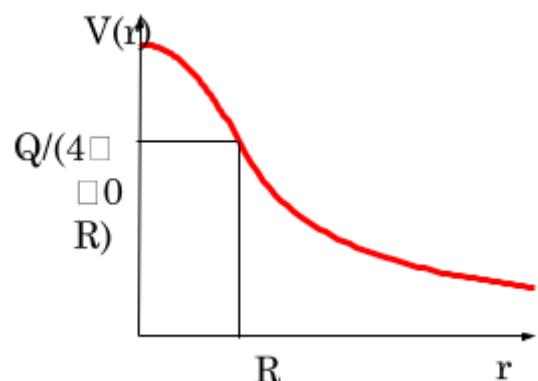
La distribution de charge étant uniforme, le potentiel au centre de la sphère se calcule simplement :

$$V(0) = \iiint_{\substack{\text{sphère} \\ \text{chargée}}} \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec } d\tau = 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{3}{8} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \\ V = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) & \text{si } r < R \end{cases}$$



11.B. POLYTECHNIQUE 1999 Filière MPPhysique 1

- b) L'énergie d'interaction électrostatique E_{el} s'écrit alors $E_{el} = Q_1 V_2(r > R) = Q_2 V_1(r > R)$, c'est-à-dire :

$$E_{el} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Deuxième partie

Collision et évolution du système composite

1. Energie du système avant le contact.

- a) L'énergie totale du système s'écrit :

$$E = E_c^* + E_c(G) + E_{el} + U_b$$

- b) Le système des deux noyaux étant isolé, sa quantité de mouvement est constante au cours du mouvement. Le centre de masse a donc un mouvement rectiligne et uniforme.
- c) L'énergie cinétique du centre de masse s'écrit :

$$E_c(G) = \frac{P^2}{2m(A_1 + A_2)} = \frac{P^2}{4mA} = \text{cte} \quad \text{car } A_1 = A_2 = A$$

Cette énergie cinétique étant constante, calculons-la à l'instant initial :

$$E_c(G) = \frac{(p_1(0))^2}{4mA} = \frac{E_{lab}}{2}$$

La moitié de l'énergie cinétique initiale du noyau projectile correspond à l'énergie cinétique du centre de masse du système.

- d) Le système est isolé donc sa quantité de mouvement et son moment cinétique sont conservées.

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique du système est : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. En définissant le mobile équivalent (ou mobile fictif) M par un mobile de masse μ et de position $\vec{GM} = \vec{r}$, le moment cinétique du mobile fictif est également $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$.

Si ce moment cinétique est nul à l'instant initial (paramètre d'impact nul) alors le mouvement du mobile équivalent dans le référentiel barycentrique est rectiligne.

Si ce moment cinétique est non nul alors le mouvement est plan, dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$.

- e) Calculons l'énergie cinétique barycentrique : $E_c^* = E_c(\text{mobile fictif})$

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow E_c^* = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\text{Le moment cinétique s'écrit : } \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = r\vec{e}_r \wedge \mu(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}\vec{e}_z \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\frac{\vec{L}}{\mu r^2} \right)^2$$

$$E_c^* = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + \left(\frac{\vec{L}}{\mu r} \right)^2 \right)$$

On en déduit : et donc l'énergie totale barycentrique :

$$E^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2\mu r^2} + E_{el} + U_b$$

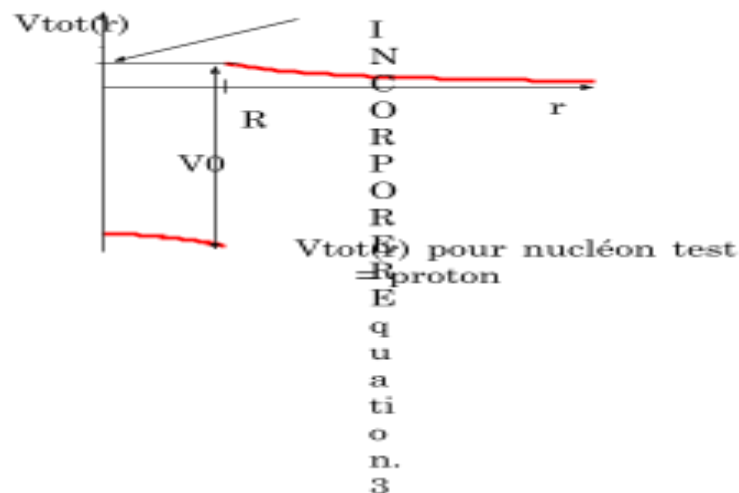
2. Barrière coulombienne.

- a) Si le nucléon test est un neutron, l'énergie potentielle totale de ce nucléon test est : $V_{tot}(r) = V_{nuc}(r)$ car le neutron n'est pas chargé.

Si le nucléon test est un proton (particule de charge e), l'énergie potentielle totale de ce nucléon s'écrit :

$$V_{tot}(r) = V_{nuc}(r) + E_{el}(r) \quad \text{où :}$$

$$\text{Si } r > 0 : \begin{cases} E_{el}(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V_{nuc}(r) = 0 \end{cases} \quad \text{Si } r < 0 : \begin{cases} E_{el}(r) = eV(r) = \frac{3Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \\ V_{nuc}(r) = -V_0 \end{cases}$$



- b) Le noyau projectile étant constitué de Z protons et de N neutrons, il existe (par rapport au zéro d'énergie potentielle) entre les deux noyaux identiques (dont les centres sont distants de $2R$ au

contact) une barrière d'énergie potentielle coulombienne $U_{coul} = Z \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 (2R)}$:

$$U_{coul} = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 (2R)} \approx 73 \text{ MeV}$$

- c) L'énergie totale barycentrique du système est :

$$E^* = \text{cte} = E_c^*(t=0) + U_b = \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2\mu r^2} \right)_{r=R} + U_{coul} + U_b$$

Or, à $t = 0$, l'énergie cinétique barycentrique du système vaut $E_{lab}/2$ (cf. question 1c) de la 2^{ème} partie)

D'où : $E^* = \frac{E_{lab}}{2} + U_b$

Au moment du contact : $\begin{cases} \dot{r}^2 > 0 \\ r = 2R \end{cases} \Rightarrow \frac{E_{lab}}{2} - U_{coul} - \frac{\dot{\varphi}^2}{2\mu (2R)^2} > 0$

Le moment cinétique du mobile fictif vaut, à $t = 0$:

$$\dot{\varphi} = \mu b v(t=0)$$

et l'énergie cinétique barycentrique :

11.B. POLYTECHNIQUE 1999 Filière MPPhysique 1

$$E_c^*(t=0) = \frac{E_{lab}}{2} = \frac{1}{2} \mu v^2(t=0)$$

On en déduit :

$$\frac{\mathbb{M}^2}{2\mu(2R)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \frac{E_{lab}}{2}$$

La condition pour que les noyaux fusionnent s'écrit donc :

$$\frac{E_{lab}}{2} \left(1 - \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \right) > U_{coul}$$



- d) Dans le référentiel barycentrique, les trajectoires des 2 noyaux sont hyperboliques lorsque la condition précédente n'est pas remplie (répulsion des deux noyaux).
- e) L'énergie minimale permettant la fusion correspond à un paramètre d'impact nul (collision frontale) c'est-à-dire

11.A. $E_{lab}^{min} = 2U_{coul} = 146 \text{ MeV}$ Prenons INCORPORER

Equation.3 $E_{lab}^{min} = 2U_{coul} = 146 \text{ MeV}$; la fusion est possible si

INCORPORER Equation.3 $\frac{\mathbb{M}^2}{2\mu(2R)^2} < \frac{E_{lab} - E_{lab}^{min}}{2}$ La valeur maximale du moment cinétique est donc : INCORPORER

Equation.3 $\frac{\mathbb{M}^2}{2\mu(2R)^2} < \frac{E_{lab} - E_{lab}^{min}}{2}$ car INCORPORER

Equation.3 $\frac{\mathbb{M}^2}{2\mu(2R)^2} < \frac{E_{lab} - E_{lab}^{min}}{2}$ On prend INCORPORER

Equation.3 $\frac{\mathbb{M}^2}{2\mu(2R)^2} < \frac{E_{lab} - E_{lab}^{min}}{2}$ soit INCORPORER

Equation.3 $E_{lab} = 400 \text{ MeV} > E_{lab}^{min}$. La fusion est donc possible à condition que INCORPORER

Equation.3 $\frac{b}{R} < 2\sqrt{1 - \frac{E_{lab}^{min}}{E_{lab}}} \approx 1,6$.Compression.L'énergie de rotation du système composite est :

INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{2\mu r^2}$ avec $r = 2R$ soit : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$

$E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$

L'énergie totale barycentrique s'exprime sous la forme : INCORPORER Equation.3

L'énergie de rotation est considérée comme constante. La densité maximale est obtenue quand l'énergie cinétique interne est nulle (compression maximale). Ceci est également valable pour la

densité minimale. On a alors : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On en tire : INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ Ensuite, le système subit une expansion jusqu'à une densité minimale

donnée par : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ c'est-à-dire : INCORPORER Equation.3

$E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ Le système oscille ainsi autour de la position d'équilibre caractérisée par $x = x_0$. Pour une collision frontale (paramètre d'impact nul), le composite ne tourne pas après la collision et son énergie cinétique de rotation est nulle. L'énergie barycentrique du système est : INCORPORER

11.B. POLYTECHNIQUE 1999 Filière MPPhysique 1

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On en déduit : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ et INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ A.N : $\chi_{max} = 1,42$, $\chi_0 = 0,22 \text{ fm}^{-3}$ et $\chi_{min} = 0,58$, $\chi_0 = 8,9.10^{-2} \text{ fm}^{-3}$ Troisième partie Fragmentation du système composite formé Etude de la pression. INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ d'où à température nulle : INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ Le volume du système composé de $2A$ nucléons s'exprime ainsi : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$. Donc INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On en tire : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ INCORPORER Equation.3 avec l'expression 2) pour l'énergie interne. L'état d'équilibre défini par la densité χ_0 correspond à la pression nulle. Etudions la stabilité de cet équilibre : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$. Une légère compression du composite ($d\chi > 0$) entraîne une augmentation de pression donc une expansion du composite retour vers l'état d'équilibre). L'équilibre est donc stable vis-à-vis des oscillations de densité. La pression devient négative pour $\chi > 0$; ceci correspond aux forces de cohésions nucléaires responsables de la cohésion du noyau. Une équation d'état réaliste à température nulle. INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$. Posons INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ avec $\chi \ll 1$. En développant U au 2ème ordre en χ , il vient : INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ En identifiant à INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$, on obtient : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ d'où l'on tire : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$

INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ INCORPORER

Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ soit numériquement : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ avec le MeV comme unité d'énergie et le femtomètre comme unité de longueur). On trouve alors deux valeurs de χ non nulles qui vérifient cette équation : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ L'équation d'état à température non nulle. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$

$E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ soit INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ La pression totale est donc : INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ INCORPORER Equation.3 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$. Cette équation du second degré admet 2 racines réelles si son discriminant réduit est strictement positif c'est-à-dire :

11.B. POLYTECHNIQUE 1999 Filière MPPhysique 1

$E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ donc pour : $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ avec
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On a alors : $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ et
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ et INCORPORER
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On peut écrire : $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ pour $T < T_c$. Donc
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ pour INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ et
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$: le système composite se comporte
 « normalement » c'est-à-dire qu'une légère compression du composite ($dX > 0$) entraîne une
 augmentation de pression donc une expansion du composite et vice versa, ceci quelle que soit la
 densité particulaire ; le système ne se fragmentera donc pas. Equation d'état et
 fragmentation. L'équation 5) est une équation d'onde (équation de d'Alembert). INCORPORER
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ car INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ On en déduit : INCORPORER
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ car INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ D'après la question 1d) de la
 troisième partie : INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ $\star$ représente la masse volumique à
 l'équilibre soit : $\star = mX_0$ d'où : INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ et au voisinage de X_0 ,
 INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ c'est-à-dire : INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ Si on
 admet que quel que soit X et quelle que soit T : INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$, on obtient
 en utilisant le résultat de la question 3a) de la troisième partie que INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ est du même signe que INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$. Donc INCORPORER
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ quand X devient inférieure à INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$ au
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$
 cours de l'expansion du système. La solution de l'équation INCORPORER $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$
 $E_{rot} = \frac{I^2}{8\mu R^2}$, la pression devenant alors très importante :
 il y a ainsi possibilité de brisure du système composite (fragmentation). FIN DU CORRIGE