

3.3 Έλλειψη

ΘΕΜΑ Β

1. (20658) Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c) . (Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 09)

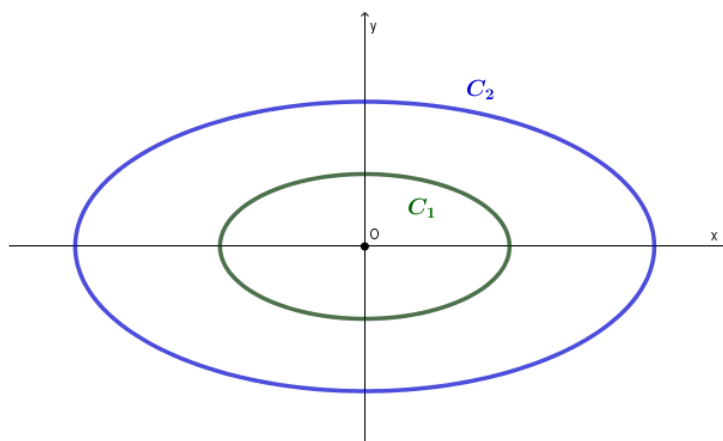
2. (20718) Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 9)

3. (20865) Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων. (Μονάδες 14)

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές. (Μονάδες 11)

4. (20883) Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' . (Μονάδες 12)

β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 13)

5. (21308) Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της B(0, 4). (Μονάδες 08)

6. (21647) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία E(4,0), E'(-4,0) και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C. (Μονάδες 10)

β) την εκκεντρότητά της C. (Μονάδες 7)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$. (Μονάδες 8)

7. (21648) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία E(3,0), E'(-3,0) και διέρχεται από το σημείο

$$M(4, \frac{12}{5})$$

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$.

(Μονάδες 7)

$$\text{Δίνεται ότι } \sqrt{1369} = 37$$

8. (22168) Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο A(1,2), να βρείτε:

(i) Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

(ii) Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O, αν η μια εστία της είναι το σημείο E(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

9. (22192) Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0, 9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0, 9). (Μονάδες 10)

10. (22268) Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E(.....,) και E'(.....,) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2).

(Μονάδες 10)

11. (22558) Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία E'(-2, 0) και E(2, 0) και μήκος μεγάλου άξονα (AA') = 8.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(Μονάδες 12)

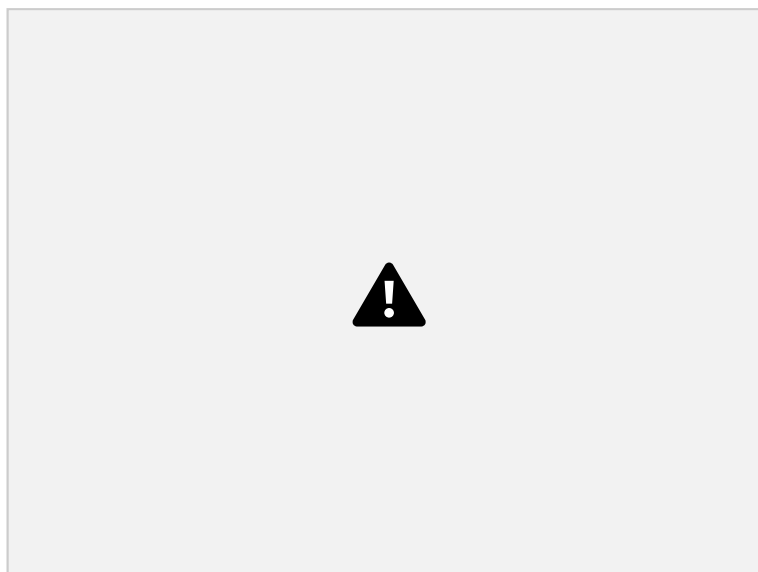
β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία E(2, 0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

(i) Να αποδείξετε ότι Σ(2, 3) και Ρ(2, -3).

(Μονάδες 8)

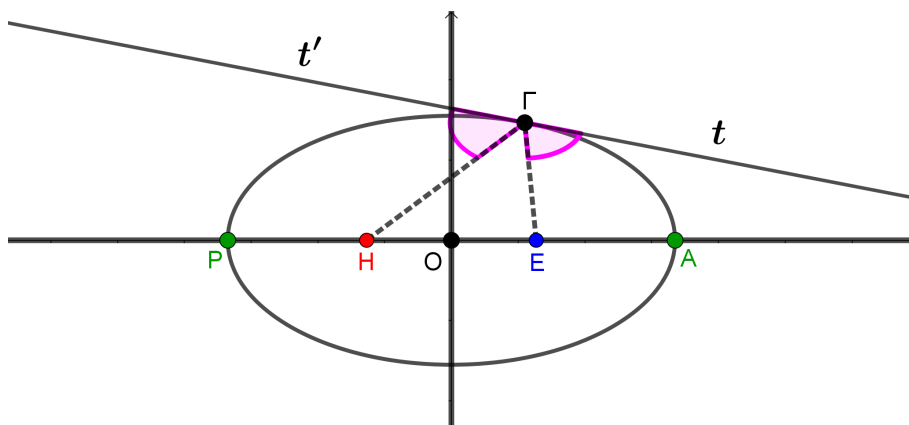
(ii) Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ Δ

12. (20666) Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι PH = 147,5 εκατομμύρια Km και η μέγιστη AH = 152,5 εκατομμύρια Km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία Η και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του HE και x'x τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας y'y είναι η μεσοκάθετος του HE.



α) Να αποδείξετε $(PA) = 300$ εκατομμύρια Km , $(HE) = 5$ εκατομμύρια Km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$. (Μονάδες 10)

β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΗΓΕ. (Μονάδες 8)

γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{t'GH}$ και $\hat{t'GE}$ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

13. (20722) Έστω $K(x, y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $(\varepsilon): 3x + 5y = 25$.

β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M . (Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε . (Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{EME'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 6)

14. (20726) Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράφει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της. (Μονάδες 5)

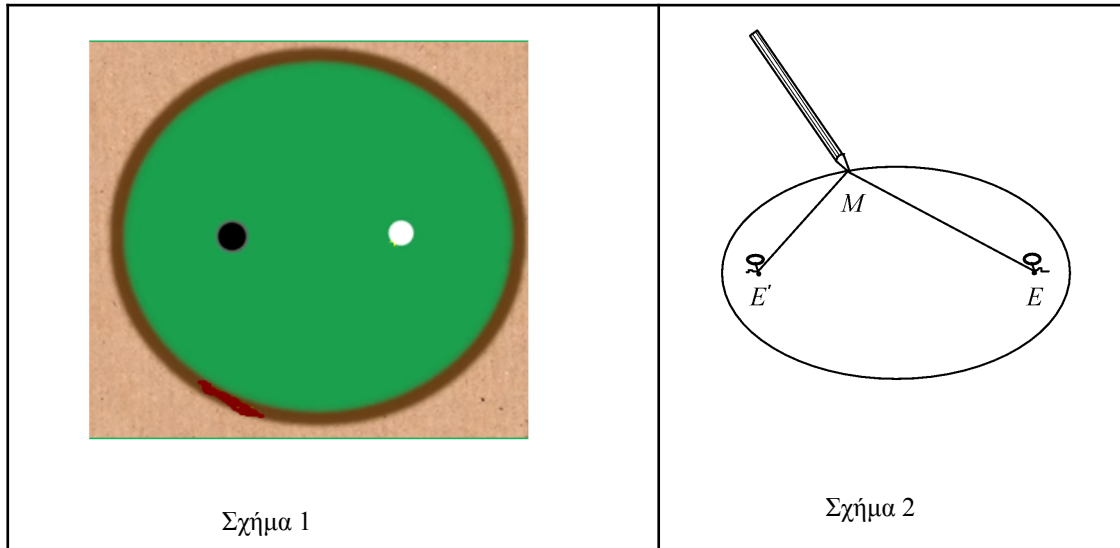
γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να

βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

- 1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
- 2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
- 3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
- 4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεως αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



15. (21655) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη C με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0), A'(-5,0), B, B'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:

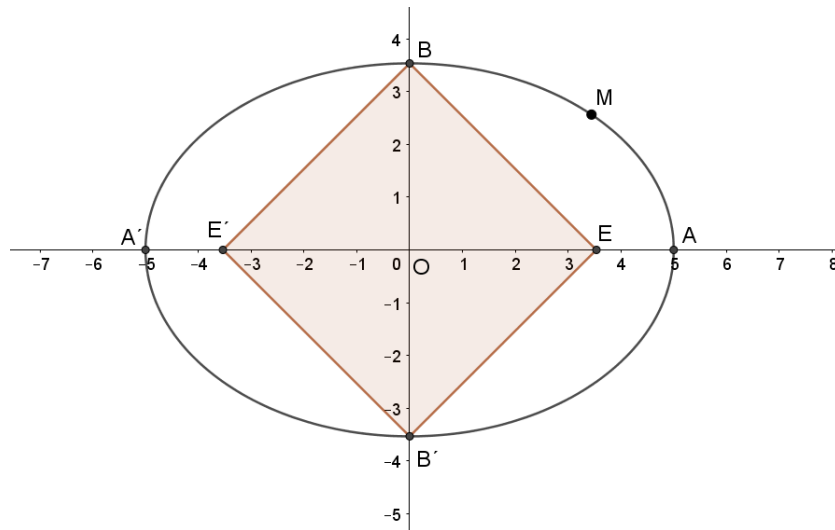
α) τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E' . (Μονάδες 8)

β) την εξίσωση της έλλειψης C . (Μονάδες 7)

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της C , που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' .

(i) να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε. (Μονάδες 5)

(ii) να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 5)



16. (22273) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

(i) Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x' και $y'y$.

(ii) Των εστιών E και E' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0, 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)