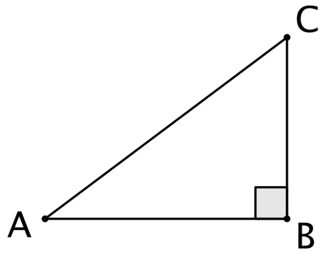
## Chapitre D3
## Triangles rectangles (Pythagore)

### I. Enonce du théorème

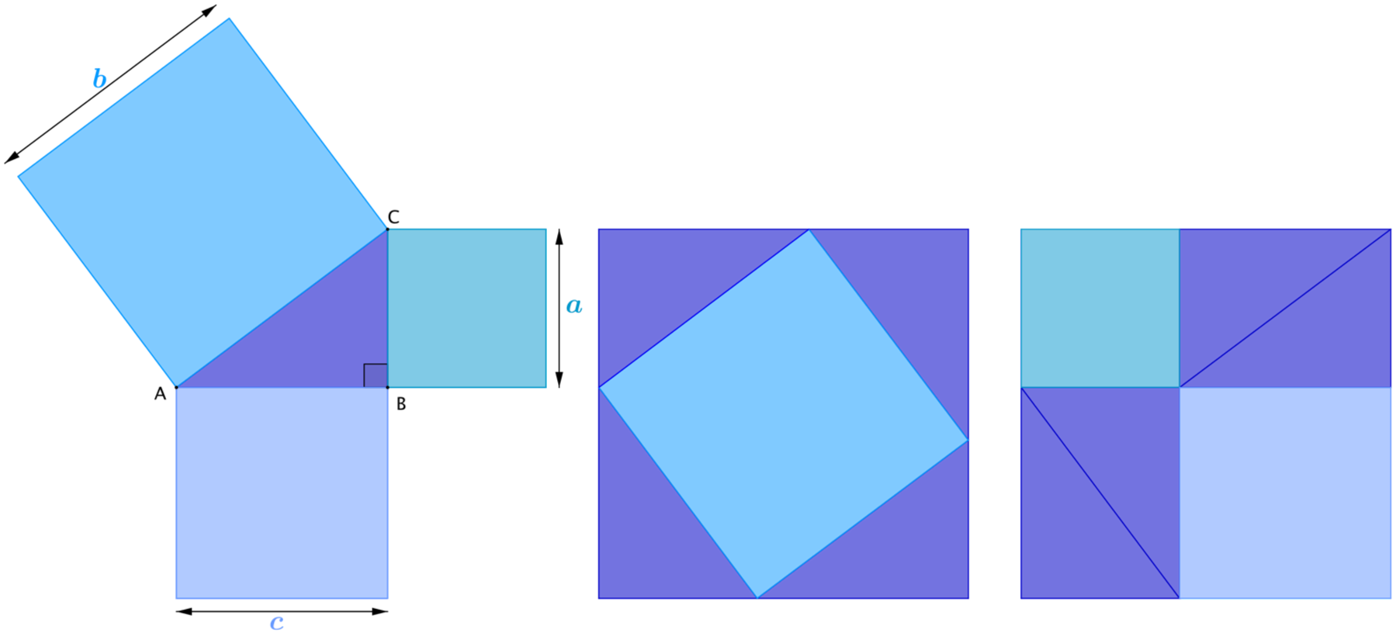
**Théorème de Pythagore**
Soit ABC un triangle rectangle en B. Sous cette hypothèse, l'égalité suivante est vérifiée :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$.




Autrement dit, dans un triangle rectangle, **la somme des carrés des côtés de l'angle droit égale le carré de l'hypoténuse**.

**Définition**
Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté le plus grand. C'est aussi le côté **opposé** à l'angle droit.

**Preuve**
On suppose que le triangle ABC est rectangle en B et on veut démontrer que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Autrement dit que l'aire du carré de côté AC égale la somme des aires des carrés de côtés AB et BC.
Considérons la figure suivante :

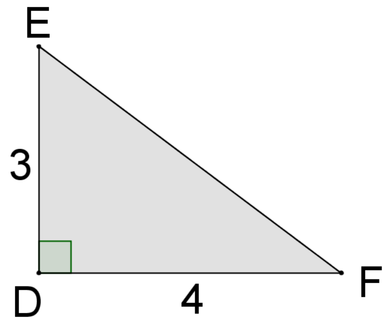



On peut remarquer que, sur la deuxième figure, le carré est constitué de **4 triangles superposables** à ABC et du **carré de côté b**. Sur la troisième figure, le carré de même aire est constitué de **4 triangles superposables** à ABC, du **carré de côté a** et du **carré de côté c**.
On en déduit que l'aire du carré de côté b égale la somme des aires des carrés de côtés a et c, ce qui revient à dire que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

En pratique, le théorème de Pythagore sert à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure des deux autres.

### Exemple 1

Soit un triangle EDF rectangle en D tel que $ED = 3\ cm$ et $DF = 4\ cm$.
Calcule la longueur EF.




**Solution**

Dans le triangle EDF rectangle en D, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$EF^2 = ED^2 + DF^2$ $EF^2 = 3^2 + 4^2$ $EF^2 = 9 + 16$ $EF^2 = 25$ $EF^2 = 5^2$

Donc $EF = 5\ cm$.

**Remarque**

Pour calculer EF, on peut se servir de la touche **racine carrée** de la calculatrice ($\sqrt{\ }$).

On note alors $EF = \sqrt{25} = 5\ cm$.

### Exemple 2

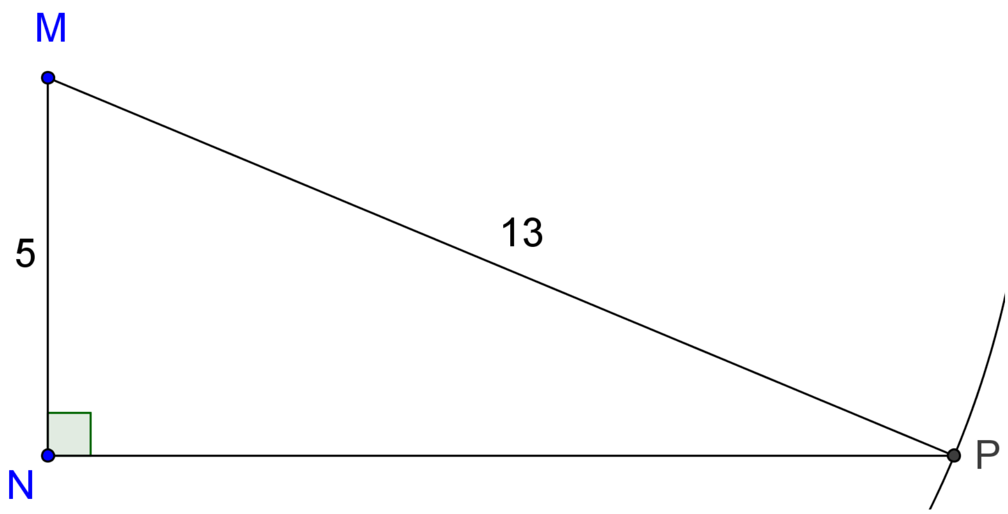
Soit un triangle MNP rectangle en N tel que $MP = 13\ cm$ et $MN = 5\ cm$.
*Calcule la longueur NP.*

**Solution**

Dans le triangle MNP rectangle en N, on peut appliquer le théorème de Pythagore.

$MP^2 = MN^2 + NP^2$

$13^2 = 5^2 + NP^2$




$NP^2 = 13^2 - 5^2$ $NP^2 = 169 - 25$ $NP^2 = 144$

Or $NP > 0$,

Donc $NP = \sqrt{144} = 12\ cm$

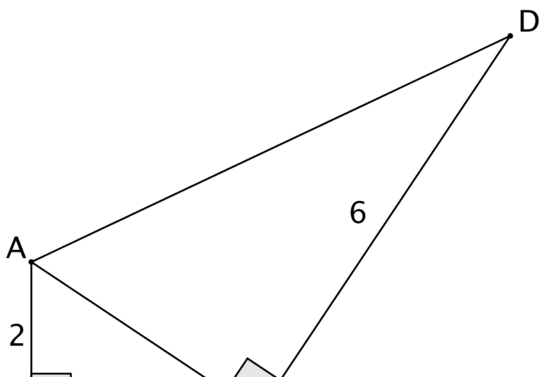
**Remarque**

- Si l'on doit calculer **l'hypoténuse** du triangle, on fait une **addition** pour trouver le résultat.
- Si l'on doit calculer la mesure d'un des **côtés de l'angle droit**, on fait une **soustraction** pour trouver le résultat.
- Le théorème de Pythagore ne peut s'appliquer que dans un **triangle rectangle**.

## II. Problèmes

### Problème 1

On veut calculer la longueur AD.




**Solution**

Dans le triangle ABC rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 AC^2 = 2^2 + 3^2 AC^2 = 4 + 9 AC^2 = 13$

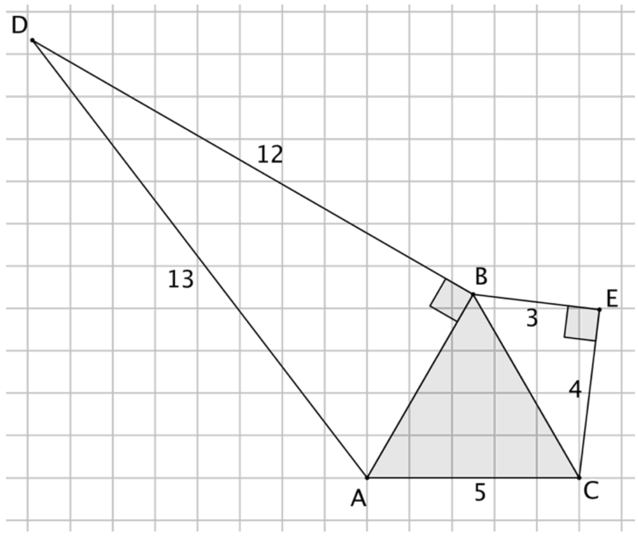
Dans le triangle ACD rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$AD^2 = AC^2 + CD^2 AD^2 = 13 + 6^2 AD^2 = 13 + 36 AD^2 = 49$

Or $AD > 0$ donc $AD = \sqrt{49} = 7$

**Problème 2**

*Le triangle ABC est-il équilatéral ?*




**Solution**

**On calcule d'abord la longueur BC.**

Dans le triangle BEC rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$BC^2 = BE^2 + EC^2 BC^2 = 3^2 + 4^2$

$BC^2 = 9 + 16 BC^2 = 25$

Or $BC > 0$ donc $BC = \sqrt{25} = 5\ cm$

**On calcule maintenant AB.**

Dans le triangle ABD rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore.

$AD^2 = AB^2 + BD^2 13^2 = AB^2 + 12^2$

$AB^2 = 13^2 - 12^2 AB^2 = 169 - 144 AB^2 = 25$

Or $AB > 0$ donc $AB = \sqrt{25} = 5\ cm$

On en déduit que les 3 côtés du triangle ABC ont la même longueur donc ABC est un triangle équilatéral.

## III. Réciproque de Pythagore

Le théorème de Pythagore affirme que, si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$. L'inverse est-il vrai ? C'est-à-dire, si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, le triangle ABC est-il rectangle en C ? La réponse est affirmative.

**Réciproque de Pythagore**

Dans un triangle, si le carré du **plus grand côté** égale la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au point opposé au plus grand côté.

Autrement dit, si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, le triangle ABC est rectangle en C.

**Exemple (rédaction type)**

Soit le triangle DEF tel que $DE = 12cm$, $DF = 13cm$ et $EF = 5cm$. Le triangle DEF est-il rectangle ?

**Solution**

**D'une part,** $DF^2 = 13^2 = 169$

**D'autre part,** $DE^2 + EF^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

**Donc,** $DF^2 = DE^2 + EF^2$.

D'après la réciproque de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en E.

## IV. Contraposée de Pythagore

On peut se poser la question de savoir ce qu'il se passe lorsque l'égalité n'est pas vérifiée : si le triangle était rectangle, l'égalité serait vérifiée d'après le théorème de Pythagore. Donc, si elle ne l'est pas, le triangle ne peut être rectangle. On en déduit la propriété suivante :

### Contraposée de Pythagore

Dans un triangle, si le carré du **plus grand côté** n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

### Exemple

Le triangle JKL défini par $JK = 3,6cm$, $KL = 4,8\ cm$ et $JL = 5,99\ cm$ est-il rectangle ?

**Solution**

**D'une part,** $JL^2 = 5,99^2 = 35,8801$

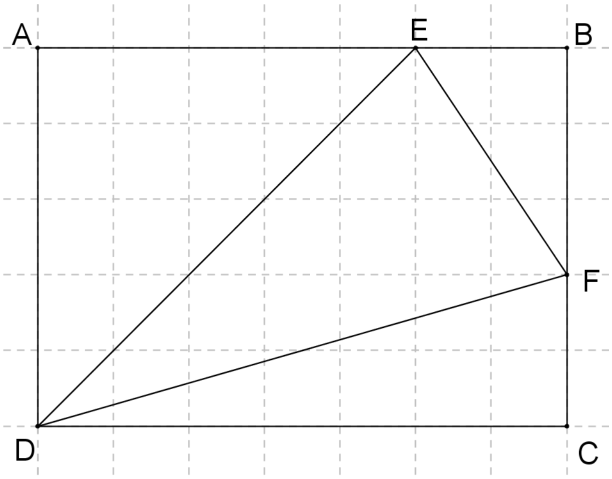
**D'autre part,** $JK^2 + KL^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$

**Donc** $JL^2 \neq JK^2 + KL^2$

D'après la contraposée de Pythagore, le triangle JKL n'est pas rectangle.

## V. Problèmes

### Problème 1




On sait que ABCD est un rectangle.

$AE = 5\ cm$, $EB = FC = 2\ cm$, $BF = 3\ cm$.

*Le triangle DEF est-il rectangle ?*

**Solution**

On calcule d'abord les longueurs DE, EF et DF.

Dans le triangle ADE rectangle en A, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$DE^2 = DA^2 + AE^2$

$$DA = BC = BF + FC = 3 + 2 = 5\ cm$$

$DE^2 = 5^2 + 5^2$

$DE^2 = 50$

Dans le triangle EBF rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$EF^2 = EB^2 + BF^2$

$EF^2 = 2^2 + 3^2$

$EF^2 = 13$

Dans le triangle FCD rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$FD^2 = FC^2 + CD^2$ $\qquad CD = AB = AE + EB = 5 + 2 = 7\ cm$

$FD^2 = 2^2 + 7^2$

$FD^2 = 53$

[FD] est le plus grand côté du triangle DEF.

D'une part, $FD^2 = 53$

D'autre part, $DE^2 + EF^2 = 50 + 13 = 63$

Donc $FD^2 \neq DE^2 + EF^2$

D'après la contraposée de Pythagore, le triangle DEF n'est pas rectangle.

**Remarque**

$DE^2 + EF^2 > FD^2$ donc l'angle $D\hat{E}F$ est aigu.

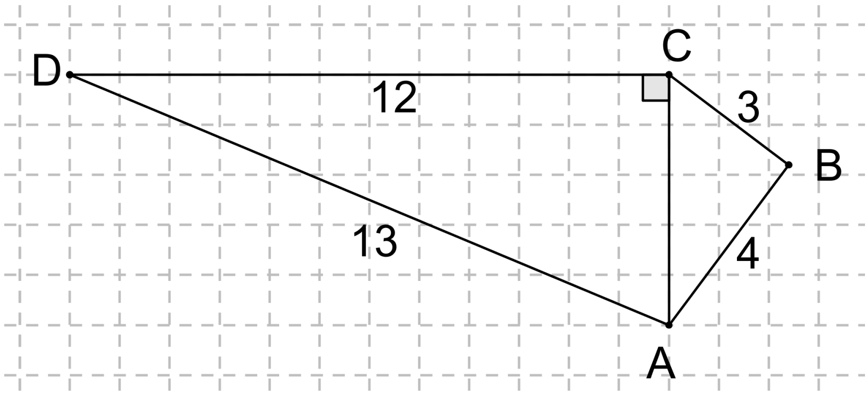
On aurait pu écrire, à la place des deux raisonnements avec Pythagore :

*« De la même façon, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans les triangles EBF rectangle en B et FCD rectangle en C.*

*On en déduit que $EF^2 = 13$ et $FD^2 = 53$ »*

**Problème 2**

*Le triangle ABC est-il rectangle ?*




**Solution**

*Dans le triangle ACD rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore :*

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$13^2 = AC^2 + 12^2$$

$$AC^2 = 13^2 - 12^2$$

$$AC^2 = 169 - 144 = 25$$

*Dans le triangle ABC, [AC] est le côté le plus long.*

*D'une part, $AC^2 = 25$*

*D'autre part, $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$*

*Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$*

*D'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.*