Chapitre 9
Matrices et opérations élémentaires

I. Un peu d'histoire et définition d'une matrice

Afin de simplifier la résolution de **systèmes linéaires** du type

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + \end{cases}$$

où les nombres $a_{i,j}$ et les nombres b_i sont des constantes données et les nombres x_i sont des inconnues, **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1706)** introduit la **notation indicielle**. Gabriel Cramer (1704-1752), Théophile Vandermonde (1735-1796) et Pierre Simon Laplace (1749-1827) vont par la suite utiliser la **notation matricielle** qui nous est parvenue sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}$$

pour calculer le **déterminant** de la matrice $\left(a_{i,j}\right)$ dans le cas où $n = p$.

Par la suite, **Joseph Louis Lagrange (1736-1813)** et **Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** utilisent des matrices pour étudier les **transformations linéaires**.
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) définit ensuite le **produit matriciel**.
James Sylvester (1814-1897) utilise pour la première fois le mot **matrice** pour désigner cet objet et Arthur Cayley (1821-1895) vient diffuser cette notion.

II. Propriétés et opérations

Dans la suite du cours, tous les nombres utilisés seront des réels mais les règles sont rigoureusement identiques dans C.

Définition 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des **matrices** de n **lignes** et de p **colonnes**.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

- $\left(a_{i,1}\right)_{i\in[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une **matrice colonne**.
- $\left(a_{1,j}\right)_{j\in[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix} \in M_{1,p}(\mathbb{R})$ est une **matrice ligne**.
- Si $n = p$, $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ est une **matrice carrée**.
- Si $n = p$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ est la **matrice identité** de taille n.
- Si $n = p$, $diag\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ est une **matrice diagonale** de taille n.

Exemples

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ est une matrice de taille 4×3.
- $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$ est une **matrice colonne** de taille 4×1.
- $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,4}(\mathbb{R})$ est une **matrice ligne** de taille 1×4.
- $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -15 & -3 & 9 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 8 & -20 & -4 & 12 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}) = M_4(\mathbb{R})$ est une **matrice carrée** de **taille** 4.
- $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ est la **matrice nulle** de taille 2×3.

  Quand cela ne prête pas à confusion, la matrice nulle sera notée **0** (notation en général utilisée lorsque l'on manipule des matrices carrées).
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ est la **matrice identité** de taille 3.
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ est une **matrice diagonale** de taille 3.

Remarque

On peut identifier $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs d'un espace à n dimensions.

Propriété 1 (somme et produit par un scalaire)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)$$
$$\lambda A = \left(\lambda a_{i,j}\right)$$

Exemples

Reprenons les matrices précédentes.

- $I_3 + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $E + F = (4\ 3\ 1\ -2\ 0\ 9) + (5\ -6\ 7\ -8\ 10\ 11) = (4+5\ \ 3-6\ \ 1+7\ \ -2-8\ \ 0+10\ \ 9+11) = (9\ -3\ 8$
- $5A = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times 1 \\ 5\times 3 \\ 5\times(-1) \\ 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$
- $-2D = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\times 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $3M = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & -6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ -12 & 21 & -18 \end{pmatrix}$

Propriété 2 (associativité et commutativité de la somme)

Soient $n, p, q, r \in N^*$ et $\lambda, \mu \in R$. Soient $(A, B, C) \in M^3_{n,p}(R)$.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$A + B = B + A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Démonstration

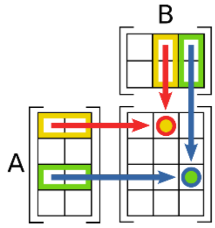
La démonstration découle de manière évidente de l'associativité, de la commutativité et de la distributivité dans R.

Propriété 3 (produit de deux matrices)

Soient $n, p, q \in N^*$. Soient $A \in M_{n,p}(R)$ et $B \in M_{p,q}(R)$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$.

Le produit $C = A \times B$ est une matrice de $M_{n,q}(R)$. D'autre part, si l'on pose $C = \left(c_{i,j}\right)$,

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$



Exemples

Reprenons les matrices précédentes.

- $B \times A$ est une matrice de $M_{1,1}(R) \approx R$

$$B \times A = (2 \ \ -5 \ \ -1 \ 3)(1 \ 3 \ \ -1 \ 4) = (2 \times 1 - 5 \times 3 - 1 \times (-1) + 3 \times 4) = (0) = 0$$

- $A \times B$ est une matrice de $M_{4,4}(R)$

$A \times B = (1 \ 3 \ \ -1 \ 4)(2 \ \ -5 \ \ -1 \ 3) = (1 \times 2 \ 1 \times (-5) \ 1 \times (-1) \ 1 \times$ ... $\times 2 \ -$

- $D \times I_3$ est une matrice de $M_{3,3}(R)$

$D \times I_3 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ \ -2)(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2$

Le coefficient d'indice est obtenu en multipliant les coefficients de la ligne de D par les coefficients de la colonne de

Remarquons que

$I_3 \times D = D$

- $M \times E$ est une matrice de $M_{4,2}(R)$

$M \times E = (1 \ 3 \ 5 \ 2 \ \ -2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ \ -4 \ 7 \ \ -6)(4 \ 3 \ 1 \ \ -2 \ 0 \ 9) = (1 \times 4 + 3 \times 1 + 5 \times 0 \ 1 \times 3 + 3 \times (-2) + 5 \times 9 \ 2 \times 4$

$M \times E = (7 \ 42 \ 6 \ 10 \ 20 \ 15 \ \ -9 \ \ -80)$

Remarquons que l'on ne peut pas calculer le produit $E \times M$ car leurs dimensions ne sont pas compatibles.

- Posons

$$G = (-1 \ 2 \ \ -2 \ 2 \ \ -4 \ 4 \ 1/2 \ \ -1 \ 1) \ et \ H = (2 \ \ -2 \ \ -1 \ \ -1 \ 0 \ 1/2 \ \ -2 \ 1 \ 1)$$

$G \times H = (-1 \ 2 \ \ -2 \ 2 \ \ -4 \ 4 \ 1/2 \ \ -1 \ 1)(2 \ \ -2 \ \ -1 \ \ -1 \ 0 \ 1/2 \ \ -2 \ 1 \ 1) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

$H \times G = (2 \ \ -2 \ \ -1 \ \ -1 \ 0 \ 1/2 \ \ -2 \ 1 \ 1)(-1 \ 2 \ \ -2 \ 2 \ \ -4 \ 4 \ 1/2 \ \ -1 \ 1) = (-13/2 \ 13 \ \ -13 \ 5/4 \ \ -5/2 \ 5/2 \ 9/2$

Remarquons que $G \times H \neq H \times G$

Par ailleurs, $G \times H = 0$ sans que ni G ni H ne soient la matrice nulle. L'ensemble $M_n(R)$ n'est pas intègre contrairement à R ou C munis de la multiplication usuelle.

Propriété 4 (distributivité et associativité de la multiplication)

Soient $n, p, q, r \in N^*$ et $\lambda \in R$. Soient $\left(A, A', B, B', C\right) \in M^2_{n,p}(R) \times M^2_{p,q}(R) \times M_{q,r}(R)$. -

$$A\left(B + B'\right) = AB + AB'$$
$$\left(A + A'\right)B = AB + A'B$$
$$(AB)C = A(BC)$$

Preuve

Les deux premières égalités découlent directement de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans R. Posons maintenant $A = \left(a_{i,j}\right)$, $B = \left(b_{i,j}\right)$ et $C = \left(c_{i,j}\right)$

Posons aussi $D = AB = \left(d_{i,j}\right)$, $E = BC = \left(e_{i,j}\right)$ et $P = (AB)C = \left(p_{i,j}\right)$

$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], d_{i,k} = \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \times b_{m,k}$$

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!], p_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} d_{i,k} \times c_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \times b_{m,k} \times c_{k,j} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i,m} \times b_{m,k} \times c_{k,j}$$

On a pu inverser les deux sommations car les sommes sont finies et les indices de sommation sont indépendants.
$a_{i,m}$ ne dépend ni de k ni de q, on peut donc le factoriser dans la deuxième somme

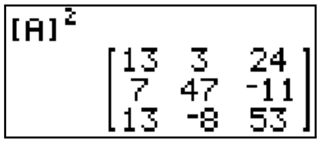
$$p_{i,j} = \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \sum_{k=1}^{q} b_{m,k} \times c_{k,j} = \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \times e_{m,j}$$

Ainsi,

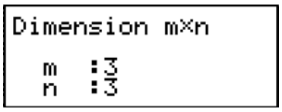
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!], p_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} d_{i,k} \times c_{k,j} = \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \times e_{m,j} \Leftrightarrow (AB)C = A(BC)$$

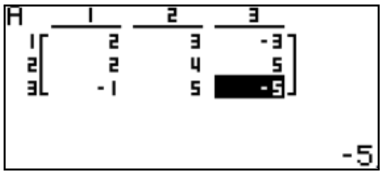
Méthode
Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels
🖥️ **Vidéo TI https://youtu.be/8c4WDe1PSZk**
🖥️ **Vidéo Casio https://youtu.be/zq5OHgdTw34**
🖥️ **Vidéo HP https://youtu.be/9a_rRHabIF8**
🖥️ **Vidéo NumWorks https://youtu.be/6js_beljebI?si=g_nEoIXy6D_kjh__**
On veut calculer le carré de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

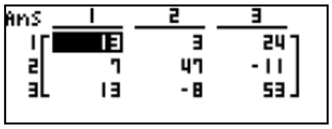
Avec une TI
Entrer dans le mode **Matrice** (**MATRIX**) puis **EDIT**.
Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.
Quittez (**QUIT**) puis entrer à nouveau dans le mode **Matrice**, sélectionner la matrice A et enfin compléter la formule pour élever A au carré.



Avec une CASIO
Entrer dans le menu **RUN.MAT** puis choisir **MAT** (Touche **F1**).
Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.
Saisir ensuite les coefficients de la matrice.
Quitter le mode d'édition (**QUIT**), enfoncer la touche **MAT** puis saisir le calcul.
On obtient le résultat.







Application : puissance d'une matrice
Soit la matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $n \in N^*$. On veut calculer A^n en fonction de n.
Solution
Soit $n \in N^*$. On décompose A sous la forme $A = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est une matrice **nilpotente** (dont les puissances s'annulent à partir d'un certain rang). On pose

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$DN = ND = N \; N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

D'après la formule du binôme de Newton, en remarquant que N^k est nulle si $n \geq 3$,

$$A^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

Soit

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Inverse d'une matrice carrée
Dans toute la suite du cours, on ne considérera que des matrices carrées de $M_n(R)$.

1. Transposée d'une matrice

Définition 2

Soit $n \in N^*$. Soient $A, B \in M_n(R)$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$. La matrice B est la **transposée** de A si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, b_{i,j} = a_{j,i}$$

On note

$$B^T = A$$

Remarques

- $\left(B^T\right)^T = B = A^T$
- La définition de la transposée reste valable avec des matrices non carrées mais la taille d'une matrice et de sa transposée ne sont pas identiques : si $A \in M_{n,p}(R)$, alors $A^T \in M_{p,n}(R)$.
- Si $A^T = A$, on parle de **matrice symétrique**.

Exemple

La transposée de la matrice $M = (0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4)$ est $M^T = (0,25\ -1\ 1\ 0\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4)$

2. Déterminant d'une matrice

Définition 3

Soit $n \in N^*$. Une **permutation** σ est une application de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Leftrightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$$

L'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$ est noté S_n

Remarque

$card(S_n) = n!$

Définition 4

Soient $n \in N^*$ et $\sigma \in S_n$. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i < j$. On dit que la paire $\{i, j\}$ est une **inversion** pour la permutation σ si

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

Définition 5

Soient $n \in N^*$ et $\sigma \in S_n$. La **signature** $\varepsilon(\sigma)$ de la permutation σ égale

- **1** si le nombre d'inversions pour σ est pair
- -1 si le nombre d'inversions pour σ est impair

Exemple

Considérons la permutation

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5\ 2)$$

Ainsi

$$\sigma(1) = 1\ \sigma(2) = 3\ \sigma(3) = 4\ \sigma(4) = 5\ \sigma(5) = 2$$

On dénombre trois inversions $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$ et $\{4, 5\}$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$

Définition 6

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in M_n(R)$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$. Le déterminant de la matrice A, noté $det(A)$ ou $|A|$ est donné par la formule

$$\det det\,(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right)$$

Où

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = a_{1,\sigma(1)} \times a_{2,\sigma(2)} \times \ldots \times a_{n,\sigma(n)}$$

Exemples

- Pour $n = 2$, on retrouve le déterminant vu en seconde

$$|a\ b\ c\ d| = ad - bc$$

$|-\ 2\ 1\ 3\ 4| = -\ 2\times4 - 1\times3 = -\ 11$

- Pour $n = 3$, on obtient

$$\left|a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Remarquons que

$$\left|a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\right| = a_{11}\left|a_{22}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{33}\right| - a_{21}\left|a_{12}\ a_{13}\ a_{32}\ a_{33}\right| + a_{31}\left|a_{12}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{23}\right|$$

Mais aussi

$$\left|a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\right| = a_{11}\left|a_{22}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{33}\right| - a_{12}\left|a_{21}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{33}\right| + a_{13}\left|a_{21}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{32}\right|$$

Dans le premier cas, on dit que l'on a développé selon les lignes et dans le deuxième cas, on a développé selon les colonnes. On utilisera plutôt l'un ou l'autre cas selon que la première ligne ou la première colonne contient des zéros.

$|2\ 3\ -\ 4\ 0\ 5\ 8\ 1\ 7\ 9| = 2|5\ 8\ 7\ 9|^{|2\ 3\ -4\ 0\ 5\ 8\ 1\ 7\ 9|} - 0\times|3\ -\ 4\ 7\ 9|^{|2\ 3\ -4\ 0\ 5\ 8\ 1\ 7\ 9|} + 1\times|3\ -\ 4\ 5\ 8|^{|2\ 3\ -4\ 0\ 5\ 8\ 1\ 7\ 9|} =$

On aurait pu aussi développer selon les colonnes

$|2\ 3\ -\ 4\ 0\ 5\ 8\ 1\ 7\ 9| = 2|5\ 8\ 7\ 9| - 3\times|0\ 8\ 1\ 9| - 4\times|0\ 5\ 1\ 7| = 2\times(-\ 11) - 3\times(-\ 8) - 4\times(-\ 5) = 22$

Dans le premier cas, le calcul est cependant plus simple. Cette formule se généralise à toutes les dimensions.

Propriété 5

Soit $n\in N^*$. Soit $A\in M_n(R)$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, posons

$$A_{i,j} = \left(a_{k,l}\right)_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2,\ k\neq i, l\neq j}$$

$$\forall j\in[\![1, n]\!],\ \det det\,(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-\ 1)^{i+j} a_{i,j}\left|A_{i,j}\right|\ (développement\ selon\ la\ colonne\ j)$$

$$\forall i\in[\![1, n]\!],\ \det det\,(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-\ 1)^{i+j} a_{i,j}\left|A_{i,j}\right|\ (développement\ selon\ la\ ligne\ i)$$

Remarque

La matrice $A_{i,j}$ est la matrice A à laquelle on a retiré la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Propriété 6

Soit $n\in N^*$. Soit $A\in M_n(R)$. Si une des lignes de A est une combinaison linéaire des autres lignes de la matrice ou si une des colonnes de A est une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice alors

$$\det det\,(A) = |A| = 0$$

Autrement dit, si les lignes ou les colonnes de la matrices sont liées, le déterminant est nul.

Exemples

- $|1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 6\ -\ 2\ 0\ -\ 4| = 0$ car $(2\ 6\ -\ 4) = 2(1\ 3\ -\ 2)$

En effet,

$|1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 6\ -\ 2\ 0\ -\ 4| = 1\times|6\ 6\ 0\ -\ 4| - 3|5\ 2\ 0\ -\ 4| - 2|5\ 2\ 6\ 6| = -\ 24 + 60 - 36 = 0$

- $|0\ 4\ -\ 3\ 2\ -\ 1\ 2\ -\ 3\ 1,5\ -\ 3| = 0$ car $(-\ 3\ 1,5\ -\ 3) = 1,5(2\ -\ 1\ 2)$

En effet,

$|0\ 4\ -\ 3\ 2\ -\ 1\ 2\ -\ 3\ 1,5\ -\ 3| = -\ 2\times|4\ -\ 3\ 1,5\ -\ 3| - 3|4\ -\ 3\ -\ 1\ 2| = -\ 2(-\ 12 + 4,5) - 15 = 0$

- $|1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 3\ 3\ 1\ 4| = 0$ car $(1\ 2\ 3) + (1\ 1\ 1) = (2\ 3\ 4)$

En effet, en développant selon la 2e colonne,

$|1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 3\ 3\ 1\ 4| = -\ |2\ 3\ 3\ 4| + |1\ 2\ 3\ 4| - |1\ 2\ 2\ 3| = 1 - 2 + 1 = 0$

Définition 7

Soit $n \in N^*$. Soit $T \in M_n(R)$. Posons $T = \left(a_{i,j}\right)$.

T est une **matrice triangulaire supérieure** si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$$

T est une **matrice triangulaire inférieure** si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$$

Exemples

- $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Propriété 7

Soit $n \in N^*$. Soit $T \in M_n(R)$. Posons $T = \left(a_{i,j}\right)$. Si T est une **matrice triangulaire**, alors

$$\det \det (T) = |T| = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Exemples

- $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times (-4) = -24$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) = -2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-3) = -6$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Propriété 8

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in M_n(R)$.

$$|A| = \left|A^T\right|$$

Propriété 9

Soit $n \in N^*$. Soient $A, B \in M_n(R)$.

$$|AB| = |A| \times |B| = |BA|$$

Propriété 10

Soit $n \in N^*$. Soient $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in R$.

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

Cas particuliers

- **Matrice définie par blocs**

  Soient $n, k, p \in N^*$ tels que $n = k + p$. Soient $A \in M_n(R)$, $B \in M_k(R)$, $C \in M_{k,p}(R)$, $D \in M_p(R)$ telles que

  $$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

  Le bloc de zéros (**0**) correspond à une matrice de taille $p \times k$. Dans ce cas,

  $$|A| = |B| \times |D|$$

- **Déterminant de Vandermonde**

  Soit $n \in N^*$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in R$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(a_j - a_i\right)$$

  🖥️ **Vidéo de la preuve** **https://youtu.be/8gr97pJSqrk?si=OrKVZ0QX3TTreUgw**

3. Inverse d'une matrice inversible

Définition 7

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in M_n(R)$. A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in M_n(R)$ telle que

$$AB = I_n$$

On note alors

$$B = A^{-1}$$

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(R)$ se note $GL_n(R)$ (GL pour groupe linéaire)

Exemples

- $I_n \times I_n = I_n$ donc $I_n = I_n^{-1}$ est son propre inverse.
- Soient $a, b, c, d \in R$ tels que $ad - bc \neq 0$. L'inverse de $A = (a\ b\ c\ d\ )$ est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}(d\ -b\ -c\ a\ )$$

Ainsi, si $A = (11\ 8\ 4\ 3\ )$ alors $A^{-1} = (3\ -8\ -4\ 11\ )$

Propriété 11

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in GL_n(R)$.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Remarques

- On verra par la suite que A^{-1} est un polynôme en A que l'on peut obtenir à l'aide du polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \left|XI_n - A\right|$ qui s'annule en A (χ est la lettre grecque minuscule khi).
- Dans l'expression de A^{-1}, on reconnaît le déterminant de la matrice A égal à $|A| = ad - bc$. Cette remarque se généralise à $M_n(R)$. Il y aura équivalence entre A inversible et $|A| \neq 0$

Propriété 12

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in M_n(R)$.

$$A \in GL_n(R) \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Pour exprimer A^{-1} en fonction des coefficients de A, on utilisera alors la comatrice dont les coefficients sont les déterminants des matrices $(-1)^{i+j}A_{i,j}$ définies à la propriété 5.

Propriété 13

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in GL_n(R)$. Posons $A = \left(a_{i,j}\right)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, posons

$$A_{i,j} = \left(a_{k,l}\right)_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq i, l \neq j}$$

La comatrice de A est définie par

$$(A) = \left((-1)^{i+j}\left|A_{i,j}\right|\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

La matrice inverse de A est donnée par

$$\forall j \in [\![1, n]\!], A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A)^T$$

Exemple

Soit

$M = (0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4\ )$

$com(M) = (|1\ -2\ -2\ -4|\ -|-1\ -2\ 1\ -4|\ |-1\ 1\ 1\ -2|\ -|0\ 1\ -2\ -4|\ |0,25\ 1\ 1\ -4|\ -|0,25\ 0\ 1$

$|M| = |0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4\ | = 0,25|1\ -2\ -2\ -4\ | + 1|-1\ 1\ 1\ -2\ | = 0,25 \times (-8) + 1 \times 1 = -1$

Donc

$M^{-1} = \frac{1}{|A|}(A)^T = \frac{1}{-1}(-8\ -2\ -1\ -6\ -2\ -0,5\ 1\ 0,5\ 0,25\ ) = (8\ 2\ 1\ 6\ 2\ 0,5\ -1\ -0,5\ -0,25\ )$

Remarque

Soit $n \in N^*$. Soit $A \in M_n(R)$. L'égalité suivante est toujours vraie même si A n'est pas inversible.

$$A(A)^T = |A|I_n$$

Application : solution d'un système

On veut résoudre le système

$$(S)\{0,25x + z = 2\ -x + y - 2z = 3\ x - 2y - 4z = -1$$

Remarquons que

$$(S)\Leftrightarrow(0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4)(x\ y\ z) = (2\ 3\ -1)$$
$$(S)\Leftrightarrow M(x\ y\ z) = (2\ 3\ -1)\Leftrightarrow M^{-1}M(x\ y\ z) = M^{-1}(2\ 3\ -1)$$
$$(S)\Leftrightarrow(x\ y\ z) = (8\ 2\ 1\ 6\ 2\ 0,5\ -1\ -0,5\ -0,25)(2\ 3\ -1) = (21\ 17,5\ -3,25)$$

On peut généraliser en reprenant l'exemple introductif et en supposant $n = p$.

$\{a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,}$

Le système admettra une solution si $A = \left(a_{i,j}\right)$ est inversible (c'est-à-dire si $|A|\neq 0$) et on aura

$$\left(x_1\ x_2\ \vdots\ x_n\right) = A^{-1}\left(b_1\ b_2\ \vdots\ b_n\right)$$

Méthode : calculer l'inverse à l'aide du polynôme caractéristique

Définition 8

Soit $n\in N^*$. Soit $A\in M_n(R)$. Le **polynôme caractéristique** de la matrice A, noté χ_A est défini par

$$\chi_A(X) = \left|XI_n - A\right|$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $n\in N^*$. Soit $A\in M_n(R)$.

$$\chi_A(A) = 0$$

Remarque

La démonstration de ce théorème est moins simple qu'il n'y paraît. On ne peut pas remplacer directement X par A dans la définition et dire que $\chi_A(A)$ est le déterminant de la matrice nulle et donc 0. Les propriétés des polynômes à valeurs dans R ne sont pas celles des polynômes à valeurs dans $M_n(R)$. Cela dit, une démonstration donnée sur Wikipédia exploite un peu cette idée.

Considérons la matrice M précédente

$M = (0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4)$

On calcule le polynôme caractéristique en développant suivant la première ligne.

$\chi_M(X) = \left|XI_3 - M\right| = |X - 0,25\ 0\ -1\ 1\ X - 1\ 2\ -1\ 2\ X + 4| = (X - 0,25)[(X - 1)(X + 4) - 4] - 1[2 + X -$

$\chi_M(X) = (X - 0,25)\left(X^2 + 3X - 8\right) - X - 1 = X^3 + 2,75X^2 - 9,75X + 1$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi_M(M) = M^3 + 2,75M^2 - 9,75M + I_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow -M^3 - 2,75M^2 + 9,75M = I_3$$
$$\Leftrightarrow M\left(-M^2 - 2,75M + 9,75I_3\right) = I_3$$

On en déduit que

$$M^{-1} = -M^2 - 2,75M + 9,75I_3$$

Or,

$M^2 = (0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4)(0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4) = (1,0625\ -2\ -3,75\ -3,25\ 5\ 5\ -$

$2,75M = 2,75(0,25\ 0\ 1\ -1\ 1\ -2\ 1\ -2\ -4) = (0,6875\ 0\ 2,75\ -2,75\ 2,75\ -5,5\ 2,75\ -5,5\ -11)$

Donc

$M^{-1} = -M^2 - 2,75M + 9,75I_3 = (-1,0625 - 0,6875 + 9,75\ 2\ 3,75 - 2,75\ 3,25 + 2,75\ -5 - 2,75 + 9,75$

$M^{-1} = (8\ 2\ 1\ 6\ 2\ 0,5\ -1\ -0,5\ -0,25)$

On retrouve le résultat trouvé précédemment.

Remarque

Si l'on écrit le polynôme caractéristique de $A = (a_{i,j})\in M_n(R)$ sous la forme

$$\chi_A(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

Alors, en définissant la **trace de** A, notée $tr(A)$, comme la somme des coefficients diagonaux

$$tr(A) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,k}$$

$$a_{n-1} =- tr(A)\ et\ a_0 = (-1)^n det(A)$$

Ainsi, aux dimensions 2 et 3,

$$n = 2 \Longrightarrow \chi_A(X) = X^2 - tr(A)X + det(A)$$

$$n = 3 \Longrightarrow \chi_A(X) = X^3 - tr(A)X^2 + \frac{1}{2}\left(tr^2(A) - tr\left(A^2\right)\right)X - det(A)$$

Dans ce dernier cas, le coefficient en X, souvent noté $Z(A)$, est la **trace de la comatrice**.

Méthode : calculer l'inverse à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

On transforme la matrice de départ en effectuant des opérations sur les lignes ou les colonnes pour obtenir la matrice identité. Dans le même temps, on applique les mêmes opérations à la matrice identité. A la fin du processus, la matrice inverse est celle obtenue à partir de la matrice identité.

Exemples

- On veut déterminer l'inverse de

$$A = (0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 3\ )$$

Solution

$(0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 3\ )|(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )L_1\ L_2\ L_3\ (0\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )|(1\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 2\ 0\ \ -1\ )L_1 \leftarrow L_1\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1\ L_3 \leftarrow 2L_1$

Donc

$$A^{-1} = (-\ 1\ 1\ 0\ \ -3\ 0\ 2\ 2\ 0\ \ -1\ )$$

- On veut déterminer l'inverse de

$$A = (1\ 2\ 3\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ )$$

Solution

$(1\ 2\ 3\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ )|(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )L_1\ L_2\ L_3\ (1\ 2\ 3\ 0\ 2\ 3\ 0\ 3\ 6\ )|(1\ 0\ 0\ 2\ \ -1\ 0\ 3\ 0\ \ -1\ )L_1 \leftarrow L_1\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2\ L_3 \leftarrow 3L$

Donc

$$A^{-1} = (-\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ -2\ 1\ 0\ 1\ \ -2/3\ )$$