

SciencesPo

Mathématiques Appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

Niveau introductif

Séances 1 et 2

Notions essentielles en mathématiques

Corrigé des exercices

Calcul mental

Exercice 1

Effectuer mentalement les calculs suivants.

$0,08 \times 0,1 =$

$34 \times 5 =$

$27 \times 3 =$

$7,2 - 3,01 =$

$41:5 =$

$0,32:10 =$

$132:3 =$

$70 \times 0,9 =$

Solution

$0,08 \times 0,1 = 0,008$

$34 \times 5 = 34 \times 10 : 2 = 340 : 2 = 170$

$27 \times 3 = 9 \times 9 = 81$

$7,2 - 3,01 = 4,19$

$41:5 = 41 \times 2 : 10 = 82 : 10 = 8,2$

$0,32:10 = 0,032$

$132:3 = 120:3 + 12:3 = 44$

$70 \times 0,9 = 7 \times 9 = 63$

Fractions

Exercice 2

Simplifier les calculs suivants.

$A = 3 - \frac{4}{5}$

$B = \frac{25}{8} \times \frac{6}{35}$

$C = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2}$

$D = \frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{6}}$

Solution

$A = 3 - \frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$

$B = \frac{25}{8} \times \frac{6}{35} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 3}{2 \times 4 \times 5 \times 7} = \frac{5 \times 3}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$

$C = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

$D = \frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{6}{3}}{\frac{6}{6} - \frac{1}{6}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{7 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{14}{5}$

Développement-Factorisation

Exercice 3

Développer les expressions suivantes.

$A = 3(5x + 2) - 2(4x - 1)$

$B = (2x - 3)(3x - 4)$

$C = (3x + 2)^2$

Solution

$A = 3(5x + 2) - 2(4x - 1) = 15x + 6 - 8x + 2 = 7x + 8$

$B = (2x - 3)(3x - 4) = 6x^2 - 8x - 9x + 12 = 6x^2 - 17x + 12$

$C = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 3x - 3y$

$B = (x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(3x - 5)$

$C = x^2 - 9$

Solution

$A = 3x - 3y = 3(x - y)$

$B = (x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(3x - 5) = (x + 1)(2x - 3 + 3x - 5) = (x + 1)(5x - 8)$

$C = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

Indices de sommations et de produits

Exercice 5

Calculer.

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = \quad \prod_{k=1}^5 k =$$

Solution

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\prod_{k=1}^5 k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120$$

NB : 5! se lit « factorielle 5 ».

Exercice 6

Écrire le plus simplement sans le signe somme ni le signe produit.

$$\sum_{i=1}^5 u_i = \quad \prod_{k=1}^{k=6} x^k =$$

Solution

$$\sum_{i=1}^5 u_i = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$\prod_{k=1}^{k=6} x^k = x^1 \times x^2 \times x^3 \times x^4 \times x^5 \times x^6 = x^{1+2+3+4+5+6} = x^{21}$$

Ordre de grandeur

Exercice 7

En 2015, le PIB du Liberia était de 2 milliards de \$ tandis que celui des Etats-Unis avoisinait 18 billions de \$. Les populations respectives de ces deux pays sont de 4,5 millions d'habitants pour le Liberia et de 320 millions pour les Etats-Unis. *Comparer les PIB puis les PIB par habitants de ces deux pays.*

Solution

le PIB du Libéria est de 2 000 millions de \$. Le PIB par habitant de ce pays est donc de 2 000 : 4,5 ≈ 400\$/hab.

Le PIB des Etats-Unis est de 18 000 000 de millions de \$. Le PIB par habitant de ce pays est donc de 18 000 000 : 320 ≈ 60 000\$/hab. Le PIB par habitant des Etats-Unis est donc environ **150 fois plus important** que celui du Libéria.

Exercice 8

La superficie des Etats-Unis est de 9 millions de km², celle du Liberia de 0,1 millions de km². *Comparer les densités de population de ces deux pays.*

Solution

La densité du Libéria est de 4,5 : 0,1 = 45 *habitants au km²*

La densité des Etats-Unis est de 320 : 9 ≈ 35 *habitants au km²*

Les densités de ces deux pays sont **comparables**.

Exercice 9

Vous êtes chargé du dossier des retraites. Les prévisions en votre possession sont les suivantes :

- En 2050 le déficit des retraites avoisinerait 100 milliards d'€ dans la situation actuelle
- La France compterait 70 millions d'habitants en 2050

Lors d'un débat, on vous demande ce que représenterait par habitant le déficit des retraites en 2050.

Que répondez-vous ?

Solution

Le déficit des retraites serait de 100 milliards d'euros en 2050, soit 100 000 millions d'euros.

Le déficit des retraites serait donc de 100 000 : 70 ≈ 1 400€ **par habitant** en 2050.

Pourcentages

Exercice 10

Dans une entreprise de 500 salariés, il y a 34% de femmes. Combien l'entreprise emploie-t-elle d'hommes ?

Solution

$$500 \times \frac{34}{100} = 170$$

L'entreprise emploie 170 femmes et donc **330 hommes**.

Exercice 11

Saint-Martin dispose de deux bureaux de vote. Le candidat X a obtenu 312 voix dans le premier bureau où il y a eu 654 votants, et 513 voix dans le second où 989 personnes ont voté. Où a-t-il obtenu son meilleur score en pourcentage ? Sera-t-il élu sachant qu'il lui faut la majorité absolue ?

Solution

$$\frac{312}{654} \approx 0,477 \approx \frac{47,7}{100}$$

$$\frac{513}{989} \approx 0,519 \approx \frac{51,9}{100}$$

$$\frac{312+513}{654+989} = \frac{825}{1643} \approx 0,502 \approx \frac{50,2}{100}$$

Le candidat X a obtenu environ **47,7% dans le bureau 1**, **51,9% dans le bureau 2** et **50,2% en tout**. Il est donc **élu**.

Exercice 12

Pour une grandeur positive, donner le coefficient multiplicateur correspondant à

- Une augmentation de 5%
- Une réduction de 23%
- Une augmentation de 0,7%
- Une augmentation de 300%

Solution

- 1,05**
- 0,77**
- 1,007**
- 4**

Exercice 13

Compléter ces phrases sur les coefficients multiplicateurs de grandeurs positives.

- 1,01 correspond à une de%.
- 2,5 correspond à une de%.
- Diviser par 2 correspond à une de%.
- 0,24 correspond à une de%.

Solution

- 1,01 correspond à une **augmentation** de **1%**.
- 2,5 correspond à une **augmentation** de **150%**.
- Diviser par 2 correspond à une **baisse** de **50%**.
- 0,24 correspond à une **baisse** de **76%**.

Exercice 14

La population du monde est passée de 3 à 7 milliards en 40 ans. Quel est son pourcentage d'augmentation ?

Solution

$$\frac{7-3}{3} \approx 1,33$$

La population a augmenté de **133%** environ.

Exercice 15

Un article augmente de 15%, puis baisse de 5%. A-t-il augmenté de 10%, de plus de 10% ou de moins de 10% ?

Solution

$$1,15 \times 0,95 = 1,0925$$

L'article a augmenté de **9,25%**.

Exercice 16

1. Après une hausse de 6,25% le prix d'un article est de 272€. *Quel était le prix de cet article avant la hausse ?*
2. Après une baisse de 5,6% le prix d'un article est de 236€. *Quel était le prix de cet article avant la baisse ?*
3. *Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 5% puis de 6% ?*
4. *Après une augmentation de 28% sur le prix d'un objet, quel devra être le taux de la remise pour retrouver le prix initial ?*
5. Le cours d'une action a baissé de 4,8%. *Quel devra être le taux d'augmentation pour retrouver le cours initial de cette action ?*
6. Après deux augmentations successives de 5% le prix d'un objet est de 48,51 €. *Quel était le prix initial de cet objet ?*

Solution

1. Le prix de cet article avant la hausse était de $272 : 1,0625 = 256\text{€}$.
2. Le prix de cet article avant la baisse était de $236 : 0,944 = 250\text{€}$.
3. L'article qui baisse successivement de 5% puis de 6% subit une baisse globale de **10,7%**.
 $0,95 \times 0,94 = 0,893$
4. Le taux de la remise pour retrouver le prix initial sera de **21,9%** environ.
 $1 : 1,28 \approx 0,781$
5. Le cours de l'action doit augmenter de **5%** environ pour retrouver son cours initial.
 $1 : 0,952 \approx 1,05$
6. Le prix initial de cet objet était de $48,51 : 1,05^2 = 44\text{€}$.

Exercice 17

Une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant.

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58	60
Montant du rachat d'un trimestre de cotisation (en euros)	2 230	2 285	2 340	2 394	2 453	2 555

1. *Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans.*
2. Le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3% par an. *Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.*

Solution

1. Le montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans est augmenté de **10%**.
$$\frac{2\,453 - 2\,230}{2\,230} = 0,1$$
2. Le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans est de $2\,555 \times 0,97^5 \approx 2\,194\text{€}$.

Exercice 18

Xavier a fait établir un devis pour réaliser des travaux dans son domicile par un artisan. Ce devis a été établi avec un taux de TVA de 20% et le montant total TTC de la facture est égal à 4 800 €. La maison de Xavier étant construite depuis plus de deux ans, le taux de TVA à appliquer est égal à 5,5%. *Quel sera finalement le montant du devis ?*

On rappelle que le prix TTC est égal au prix HT augmenté de la TVA et que la TVA se calcule sur le prix hors taxes (HT).

Solution

Le montant du devis sera finalement de $4\,800 : 1,2 \times 1,055 = 4\,220\text{€}$.

Exercice 19

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 19% en deux ans. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.

1. *Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est différent de 9,5%.*
2. *Calculer le pourcentage de baisse annuel.*

Solution

$$1. 0,905^2 = 0,819025 \neq 0,81$$

2. La baisse annuelle doit être de **10%**.

$$\sqrt{0,81} = 0,9$$

Indices

Exercice 20

Une entreprise étudie l'évolution du nombre de ses abonnés des années 2000 à 2004. On affecte l'indice 100 à l'année 2000.

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Nombre d'abonnés	2 040				
Indice	100	112	130	160	200

1. Le nombre d'abonnés était de 2 040 pour l'année 2000. De combien est-il pour l'année 2004 ?

2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?

Solution

1. Le nombre d'abonnés est de **4 080** pour l'année 2004.

$$2\,040 \times \frac{200}{100} = 4\,080$$

2. Le nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 a augmenté de **25%**.

$$\frac{200-160}{160} = 0,25$$

Exercice 21

Voici la production d'un fabricant de cabanes de jardin.

Année	1990	1995	2000	2005	2010
Production	2 520	3 610	3 860	2 760	2 980
Indice	100	143	153	110	118

1. Construire le tableau d'indices (base 100 en 1990).

2. Quel a été le taux d'évolution de la production entre 1990 et 2010 ?

Solution

2. La production entre 1990 et 2010 a augmenté de $118 - 100 = 18\%$.

Exercice 22

	4 ^{ème} trimestre 2014	4 ^{ème} trimestre 2015	4 ^{ème} trimestre 2016
Indice de référence des loyers (base 100 4 ^{ème} trimestre 1998)	125,29	125,28	125,33
Montant en euros d'un loyer révisé sur la base de l'indice	800	799,94	800,26

1. Quel sera le montant du loyer révisé sur la base de l'indice de référence des loyers du 4^{ème} trimestre 2015 et 2016 ?

2. Calculer le pourcentage d'évolution de l'indice entre le 4^{ème} trimestre 2014 et le 4^{ème} trimestre 2016.

Solution

2. l'indice entre le 4^{ème} trimestre 2014 et le 4^{ème} trimestre 2016 a augmenté de 0,03%.

$$\frac{800,26-800}{800} = 0,000325$$

Exercice 23 Taux d'évolution du CAC 40

L'indice CAC 40 est le principal indicateur de la Bourse de Paris. Cet indice a été défini à la valeur de 1 000 points au 31 décembre 1987. Les valeurs de cet indice au 31 décembre entre 2000 et 2009 sont données par le tableau ci-dessous.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
CAC 40	5 926,42	4 624,58	3 063,91	3 557,90	3 821,16	4 715,23	5 541,76	5 614,08	3 217,97	3 936,33

1. De quel pourcentage le CAC 40 a-t-il augmenté entre le 31 décembre 1987 et le 31 décembre 2000 ?

2. De quel pourcentage a-t-il diminué entre le 31 décembre 2000 et le 31 décembre 2002 ?
3. Entre le 31 décembre 2009 et le 31 décembre 2010, l'indice CAC 40 a baissé de 3,34%. Donner une valeur approchée à l'unité près de la valeur de cet indice au 31 décembre 2010.
4. De quel pourcentage aurait dû augmenter le CAC 40 en 2011 pour compenser la baisse de 3,34% de 2010 et revenir à la valeur de fin 2009 ?

Solution

1. Le CAC 40 a augmenté d'environ **493%** entre le 31 décembre 1987 et le 31 décembre 2000.

$$\frac{5\,926,42 - 1\,000}{1\,000} \approx 4,926 \approx \frac{493}{100}$$

Remarque

On pouvait arrondir le CAC à 6000 points en 2000 et trouver une augmentation d'environ 500% de tête.

2. Le CAC a diminué d'environ **48%** entre le 31 décembre 2000 et le 31 décembre 2002.

$$\frac{3\,063,91 - 5\,926,42}{5\,926,42} \approx -0,483 \approx -\frac{48}{100}$$

3. La valeur de l'indice au 31 décembre 2010 est d'environ **3805 points**.

$$3\,936,33 \times \left(1 - \frac{3,34}{100}\right) = 3\,936,33 \times 0,9666 \approx 3805$$

4. Pour compenser la baisse de 2010 il faudra une hausse de **3,46%**.

Méthode 1

$$\frac{1}{1 - \frac{3,34}{100}} \approx 1,0346 \approx 1 + \frac{3,46}{100}$$

Méthode 2

$$\frac{3\,936,33 - 3\,805}{3\,805} \approx 0,0345 \approx \frac{3,45}{100}$$

PS : la première méthode est meilleure car l'approximation est moindre.