

Στέλλα Σερεμετάκη

Μιγαδικές σειρές Taylor

Θεώρημα Taylor

Έστω

$f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο

Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

η οποία συγκλίνει στο δίσκο

$D_R(z_0)$ και ισχύουν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D_R(z_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n=0, 1, \dots$$

Η σειρά Taylor για $z=0$ ονομάζεται σειρά Maclaurin

Πρόταση : Οι στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις $e^z, \sin z, \cos z$

έχουν τα ακόλουθα αναπτύγματα σε σειρές Taylor στο μηδέν

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Στέλλα Σερμετάκη

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Ορισμός : Η μιγαδική συνάρτηση

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad e^z: \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ορίζεται ως μιγαδική εκθετική συνάρτηση

Πρόταση

Για κάθε Μιγαδικό $z=x+iy$

Ισχύει

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Ορισμός

Η μιγαδική συνάρτηση

$$\operatorname{sinc}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ορίζεται ως μιγαδικό ημίτονο

Στέλλα Σερμετάκη

$$\cos: C \rightarrow C, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

ορίζεται ως μιγαδικό συνημίτονο

Πρόταση

Για κάθε $z \in C$

Ισχύει

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Τύπος του Euler

Απόδειξη

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$$